Доказательство неравенства Минковского проведем, основываясь на справедливости неравенства Коши-Буняковского.

Имеем

$$
\begin{aligned}
||f+g|| = \sqrt{(f+g,f+g)} = \sqrt{(f,f)+2(f,g)+(g,g)} \leqslant \\
\leqslant \sqrt{(f,f)+2\sqrt{(f,f)}\sqrt{(g,g)}+(g,g)} = \\
= \sqrt{(\sqrt(f,f)+\sqrt(g,g))^2} \\
== \sqrt(f,f)+\sqrt(g,g) = ||f||+||g||.
\end{aligned}
$$

Теорема доказана.

Определение 7. Два элемента произвольного ПЕП будем называть ортогональными, если скалярное произведение этих элементов равно нулю.

Определение 8. Последовательность $\{\psi_n\}_{n=1}^{\infty}$ элементов произвольного ПЕП называется ортонормированной системой, если любые два различных элемента этой системы ортогональны и норма каждого элемента равна 1.

Примеры ПЕП.

(1) Пространство $L[-\pi,\pi]$. Рассмотрим систему, состоящую из функций $\psi_0(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}$, $\psi_{2k-1}(x) = \frac{\sin(kx)}{\sqrt{\pi}}$, $\psi_{2k}(x) = \frac{\cos(kx)}{\sqrt{\pi}}$ (здесь $k = 1, 2, \ldots$).

(2) Пространство $L[-1,1]$. Система, состоящая из функций $\psi_n(x) = \sqrt{\frac{2n+1}{2}}P_n(x)$ (здесь $P_n(x) = \frac{1}{2^n n!}\cdot\frac{d^n}{dx^n}\Big[(x^2-1)^n\Big]$).

Упражнение 2. Для систем из примеров ПЕП проверить справедливость равенств

$$
\int_{-\pi}^{\pi} \psi_k(x)\psi_l(x)\,dx = 0, \qquad \int_{-\pi}^{\pi} \psi_k^2(x)\,dx = 1.
$$

Определение 9. Пусть $\{\psi_n\}$ — произвольная ортонормированная система (ОНС) в произвольном ПЕП и f — элемент этого пространства. Рядом Фурье элемента f по указанной системе называется ряд вида

$$\sum_{n=1}^{\infty} f_k \psi_k, \tag{3}$$

где f_k — действительные числа, называемые коэффициентами Фурье элемента f и определяемые по формулам

$$f_k = (f, \psi_k). \tag{4}$$

Рассмотрим n-ую частичную сумму ряда (3)

$$S_n = \sum_{k=1}^{n} f_k \psi_k \tag{5}$$

и произвольную линейную комбинацию первых n элементов

$$\sigma_n = \sum_{k=1}^{n} c_k \psi_k \tag{6}$$

системы.

Назовем величину $||f - \sigma_n||$ *отклонением* элемента σ_n от элемента f *по норме* данного ПЕП.

Теорема 3. *Из всех сумм вида* (6) *наименьшее отклонение по норме данного ПЕП имеют n-ые частичные суммы* (5) *ряда Фурье.*

Доказательство. Рассмотрим

$$||f - \sum_{k=1}^{n} c_k \psi_k||^2 = (f - \sum_{k=1}^{n} c_k \psi_k, f - \sum_{l=1}^{n} c_l \psi_l) =$$

$$= (f, f) - 2\sum_{k=1}^{n} c_k (f, \psi_k) + \sum_{k=1}^{n} c_k^2$$

$$= (f, f) - 2\sum_{k=1}^{n} c_k f_k + \sum_{k=1}^{n} c_k^2 =$$

$$= ||f||^2 - \sum_{k=1}^{n} f_k^2 + \sum_{k=1}^{n} (c_k - f_k^2).$$

Итак получили тождество

$$||f-\sum_{k=1}^{n}c_k\psi_k||^2=||f||^2-\sum_{k=1}^{n}f_k^2+\sum_{k=1}^{n}(c_k-f_k^2).$$

Первые два члена в правой части от c_k не зависят, а $\sum\limits_{k=1}^{n}(c_k-f_k^2)\geqslant 0$ и равна нулю, когда $c_k=f_k$ для любого k.

Теорема доказана.

Следствие 1. *В любом ПЕП для любой ОНС для любого номера n и для любого элемента f данного ПЕП справедливо тождество*

$$||f-\sum_{k=1}^{n}c_k\psi_k||^2=||f||^2-\sum_{k=1}^{n}f_k^2 \tag{7}$$

— тождество Бесселя (получается при $f_k=c_k$).

Следствие 2. *В любом ПЕП для любой ОНС, любого элемента f, любого номера n и любых чисел $c_1,c_2,\ldots,c_n$ справедливо неравенство*

$$||f||^2-\sum_{k=1}^{n}f_k^2\leqslant||f-\sum_{k=1}^{n}c_k\psi_k||^2. \tag{8}$$

Теорема 4. *В любом ПЕП для любой ОНС $\{\psi_k\}$ и любой f справедливо неравенство Бесселя*

$$\sum_{k=1}^{\infty}f_k^2\leqslant||f||^2 \tag{9}$$

и, в частности, можно утверждать сходимость ряда в левой части неравенства (9).

Доказательство. Обозначим $S_n = \sum\limits_{k=1}^{n} f_k^2$ частичную сумму ряда из неравенства (9). Из тождества Бесселя (7) вытекает

$$||f||^2 - \sum_{k=1}^{n} f_k^2 \geqslant 0.$$

Отсюда имеем $\sum\limits_{k=1}^{n} f_k^2 \leqslant ||f||^2$. Так как все элементы последовательности $\{S_n\}$ не превосходят $||f||^2$, то и вся сумма ряда не больше, чем $||f||^2$.

Теорема доказана.

Следствие 1. Последовательность коэффициентов ряда Фурье сходится к нулю.

§2 Замкнутые и полные ОНС в произвольном ПЕП

Определение 1. Произвольная ОНС $\{\psi_k\}$ в произвольном ПЕП называется замкнутой, если любой элемент этого ПЕП можно приблизить по норме этого ПЕП с любой степенью точности конечными линейными комбинациями элементов этой ОНС, т.е. если для произвольного элемента f и произвольного $\varepsilon > 0$ найдутся такой номер n и такие числа c_1, c_2, $\ldots$, c_n, что $||f - \sum\limits_{k=1}^{n} c_k\psi_k|| < \varepsilon$.

Определение 2. Произвольная ОНС $\{\psi_k\}$ в произвольном ПЕП называется полной, если всякий элемент этого пространства, ортогональный всем элементам ψ_k, обязательно является нулевым элементом.

Теорема 1. *Во всяком ПЕП для любой замкнутой ОНС неравенство Бесселя переходит в точное равенство, называемое равенством Парсеваля*

$$\sum_{k=1}^{n} f_k^2 = ||f||^2. \tag{1}$$

Доказательство. Так как система замкнута, то для любого $\varepsilon > 0$ и любого элемента f существует номер n и такие числа $c_1, c_2, \ldots, c_n$, что справедливо

$$||f - \sum_{k=1}^{n} c_k \psi_k|| < \sqrt{\varepsilon}. \tag{2}$$

По неравенству (8,§1)

$$||f||^2 - \sum_{k=1}^{n} f_k^2 \leqslant ||f - \sum_{k=1}^{n} c_k \psi_k||^2 < \varepsilon.$$

Следовательно

$$||f||^2 \geqslant \sum_{k=1}^{n} f_k^2 \geqslant ||f||^2 - \varepsilon.$$

Эти два неравенства справедливы для любого $m \geqslant m$, следовательно из неравенства

$$\left| ||f||^2 \geqslant \sum_{k=1}^{n} f_k^2 \right| < \varepsilon$$

вытекает требуемое неравенство (1).

Теорема доказана.

Теорема 2. *Во всяком ПЕП для любой замкнутой ОНС и для любого элемента f этого пространства ряд Фурье этого элемента сходится по норме рассматриваемого ПЕП, т.е.*

$$\lim_{n \to \infty} ||f - \sum_{k=1}^{n} f_k \psi_k|| = 0.$$

Доказательство вытекает из теоремы 1 и тождества Бесселя.

Следствие. В пространстве $L_{[a,b]}$ с нормой $||f|| = \sqrt{\int_a^b f^2(x)dx}$ сходимость по норме эквивалентна сходимости в среднем.

Если докажем, что в пространстве $L_{[-\pi,\pi]}$ тригонометрическая система замкнута, то пользуясь доказанной теоремой, получим, что для любой $f \in L_{[-\pi,\pi]}$ ряд Фурье сходится к ней в среднем $(\lim_{n\to\infty} \sqrt{\int\limits_{-\pi}^{\pi} \Big[f(x) - \sum\limits_{k=1}^{n} f_k\psi_k(x)\Big]^2 dx} = 0)$.

Теорема 3. *В евклидовом пространстве всякая замкнутая ОНС является полной.*

Доказательство. В ЕП возьмем произвольную ОНС $\{\psi_k\}$ и любой элемент f, предположим, что этот же элемент ортогонален ко всем элементам $\{\psi_k\}$. Тогда $f_k = (f, \psi_k) = 0$, в силу равенства Парсеваля $\sum\limits_{k=1}^{\infty} f_k^2 = ||f||^2 = 0$. Используя определение ЕП, получаем $f \equiv 0$.

Теорема доказана.

В пространстве $L_{[a,b]}$ это не так: функция, не равная нулю в конечном числе точек, интегрируема по Риману и $\int\limits_a^b f(x)\,dx = 0$.

Теорема 4. *Во всяком ЕП для любой замкнутой полной и тем более замкнутой ОНС коэффициенты Фурье двух различных элементов f и g не совпадают.*

Доказательство. Пусть $f_k \equiv g_k$, т.е. все коэффициенты Фурье этих элементов совпадают, следовательно все коэффициенты Фурье разности элементов $f-g$ равны нулю, поэтому в силу равенства Парсеваля $||f-g|| = 0$. В силу аксиомы 4° определения ЕП $f - g = 0$, т.е. эти два элемента совпадают.

Теорема доказана.

Понятие полноты и замкнутости можно вводить не только для ОНС, но и для произвольной системы функций. Пусть

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi}}, \frac{\cos x}{\sqrt{\pi}}, \frac{\sin x}{\sqrt{\pi}}, \ldots, \frac{\cos nx}{\sqrt{\pi}}, \frac{\sin nx}{\sqrt{\pi}},$$

— на сегменте $[-\pi, \pi]$ это ортонормированная система.

Для введенной выше ОНС ряд Фурье функции $f \in L_{[-\pi,\pi]}$ запишется в виде

$$f_0 \frac{1}{\sqrt{2\pi}} + \sum_{k=1}^{\infty} [\overline{f}_k \frac{\sin kx}{\sqrt{\pi}} + \overline{\overline{f}}_k \frac{\cos kx}{\sqrt{\pi}}],$$

где $f_0 = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int\limits_{-\pi}^{\pi} f(x)\,dx$, $\overline{f}_k = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int\limits_{-\pi}^{\pi} f(x) \sin kx\,dx$, $\overline{\overline{f}}_k = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int\limits_{-\pi}^{\pi} f(x) \cos kx\,dx$.

Но тригонометрический ряд исторически принято записывать по-другому:

$$\frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} (a_k \cos kx + b_k \sin kx), \tag{10}$$

где $a_0 = \frac{2f_0}{\sqrt{2\pi}} = \frac{1}{\pi} \int\limits_{-\pi}^{\pi} f(y)\,dy$, $b_k = \frac{\overline{f}_k}{\sqrt{2\pi}} = \frac{1}{\pi} \int\limits_{-\pi}^{\pi} f(y) \sin ky\,dy$, $a_k = \frac{\overline{\overline{f}}_k}{\sqrt{2\pi}} = \frac{1}{\pi} \int\limits_{-\pi}^{\pi} f(y) \cos ky\,dy$.

Запишем также неравенство Бесселя:

$$\frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} (a_k^2 + b_k^2) \leqslant \frac{1}{\pi} \int\limits_{-\pi}^{\pi} f^2(x)\,dx.$$

Если будет доказано, что тригонометрическая система в ПЕП $L_{[a,b]}$ замкнута, то будут выполняться следствия:

Следствие 1. *Для любого элемента $f \in L_{[a,b]}$ справедливо равенство Парсеваля*

$$\frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} (a_k^2 + b_k^2) = \frac{1}{\pi} \int\limits_{-\pi}^{\pi} f^2(x)\,dx.$$

Следствие 2. *Тригонометрический ряд Фурье (ТРФ) любой интегрируемой по Риману функции сходится в среднем к функции на $[a,b]$, а следовательно и на любой его части.*

Вспомним, что ряд $\sum\limits_{k=1}^{\infty} u_k(x)$, сходящийся в среднем, т.е. если существует

$$\lim_{n\to\infty}\int\limits_a^b (f(x)-\sum_{k=1}^{n} u_k(x))\,dx = 0,$$

можно почленно интегрировать, поэтому справедливо

Следствие 3. *Тригонометрический ряд Фурье интегрируемой по Риману функции можно почленно интегрировать.*

Следствие 4. *Тригонометрические коэффициенты Фурье двух кусочно-непрерывных функций не совпадают.*

§3. Замкнутость тригонометрической системы в произвольном псевдоевклидовом пространстве T

1° Интеграл от периодической функции по отрезку, длина которого равна периоду.

Вспомним, что функция $f(x)$ называется *периодической с периодом* t, если она определена для всех $x \in (-\infty,+\infty)$ и если для любого x выполняется равенство $f(x+t)=f(x)$.

Лемма 1. *Пусть $f(x)$ — интегрируемая по Риману 2π-периодическая функция, заданная на всей бесконечной числовой прямой $\mathbb{R}$. Тогда*

$$\int\limits_{-\pi-x}^{\pi-x} f(\zeta)\,d\zeta = \int\limits_{-\pi}^{\pi} f(\zeta)\,d\zeta$$

для любого $x \in \mathbb{R}$.

Доказательство. Из аддитивности интеграла следует

$$\int\limits_{-\pi-x}^{\pi-x} f(\zeta)\,d\zeta = \int\limits_{-\pi-x}^{-\pi} f(\zeta)\,d\zeta + \int\limits_{-\pi}^{\pi} f(\zeta)\,d\zeta + \int\limits_{\pi}^{\pi-x} f(\zeta)\,d\zeta,$$

поэтому для доказательства леммы достаточно показать, что $\int\limits_{-\pi-x}^{-\pi} f(\zeta)\,d\zeta = -\int\limits_{\pi}^{\pi-x} f(\zeta)\,d\zeta$. Сначала мы воспользуемся периодичностью функции $f(\zeta)$, затем введем новую переменную $t = \zeta + 2\pi$.

Имеем

$$\int\limits_{-\pi-x}^{-\pi} f(\zeta)\,d\zeta = \int\limits_{-\pi-x}^{-\pi} f(\zeta+2\pi)\,d\zeta = \int\limits_{\pi-x}^{\pi} f(t)dt = -\int\limits_{\pi}^{\pi-x} f(\zeta)\,d\zeta.$$

Лемма доказана.

2° Выражение для n-ой частичной суммы тригонометрического ряда Фурье (ТРФ) функции $f(x)$.

Пусть $f(x)$ удовлетворяет условиям леммы предыдущего пункта. Вспомним выражение для n-ой частичной суммы ТРФ:

$$S_n(x,f) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{n}(a_k\cos kx + b_k\sin kx),$$

где $a_0 = \frac{1}{\pi}\int\limits_{-\pi}^{\pi} f(y)\,dy$, $a_k = \frac{1}{\pi}\int\limits_{-\pi}^{\pi} f(y)\cos ky\,dy$, $b_k = \frac{1}{\pi}\int\limits_{-\pi}^{\pi} f(y)\sin ky\,dy$.

Покажем, что

$$S_n(x,f) = \frac{1}{\pi}\int\limits_{-\pi}^{\pi} f(x+t)\frac{sin(n+\frac{1}{2})t}{2\sin\frac{t}{2}}dt, \qquad (*)$$

где $\frac{sin(n+\frac{1}{2})t}{2\sin\frac{t}{2}}$ — ядро Дирихле, в дальнейшем обозначаемое через $D_n(t)$.

Подставим выражения для коэффициентов a_0, a_k, b_k в формулу для $S_n(x, f)$:

$$S_n(x, f) = \frac{1}{\pi}\int\limits_{-\pi}^{\pi} f(y)\left\{\frac{1}{2} + \sum_{k=1}^{n}[\cos kx\cos ky + \sin kx\sin ky]\right\}dy$$

$$= \frac{1}{\pi}\int\limits_{-\pi}^{\pi} f(y)\left\{\frac{1}{2} + \sum_{k=1}^{n}\cos k(y-x)\right\}dy,$$

введем новую переменную $t = y - x$, тогда $dy = dt$ и

$$S_n(x, f) = \frac{1}{\pi}\int\limits_{-\pi-x}^{\pi-x} f(x+t)\left\{\frac{1}{2} + \sum_{k=1}^{n}\cos kt\right\}dt\frac{1}{\pi}.$$

Воспользуемся леммой

$$S_n(x, f) = \frac{1}{\pi}\int\limits_{-\pi}^{\pi} f(x+t)\left\{\frac{1}{2} + \sum_{k=1}^{n}\cos kt\right\}dt\frac{1}{\pi}$$

Используя известную формулу $2\sin\frac{t}{2}\cos kx = \sin(k + \frac{1}{2})t - \sin(k - \frac{1}{2})t$, получаем $\sum\limits_{k=1}^{n}\cos kx = \frac{\sin(n+\frac{1}{2})t}{2\sin\frac{t}{2}} - \frac{1}{2}$, тогда

$$S_n(x, f) = \frac{1}{\pi}\int\limits_{-\pi}^{\pi} f(x+t)\frac{\sin(n+\frac{1}{2})t}{2\sin\frac{t}{2}}dt.$$

Пример 1. Для функции $f(z) \equiv 1$ все частичные суммы $S_n(x, f) = 1$. Отсюда легко получается, что

$$\frac{1}{\pi}\int\limits_{-\pi}^{\pi}\frac{\sin(n+\frac{1}{2})t}{2\sin\frac{t}{2}}dt = 1. \qquad (\tilde{*})$$

3° Формула для подсчета чезаровских средних сумм.

Рассмотрим суммы $\sigma_n(x,f)$ вида

$$\frac{S_0(x,f)+S_1(x,f)+\cdots+S_{(n-1)}(x,f)}{n},$$

называемые *средними арифметическими* или *чезаровскими средними* суммами. Докажем, что для $\sigma_n(x,f)$ справедливо представление

$$\sigma_n(x,f)=\frac{1}{n\pi}\int\limits_{-\pi}^{\pi} f(x+t)\frac{\sin^2\frac{nt}{2}}{2\sin^2\frac{t}{2}}dt, \qquad (**)$$

где $\frac{\sin^2\frac{nt}{2}}{2\sin^2\frac{t}{2}}=\Psi_n(t)$ — ядро Фейера.

С помощью формулы $2\sin\frac{t}{2}\sin(k+\frac{1}{2})t=\cos kt-\cos(k+1)t$ имеем $\sum\limits_{k=0}^{n-1}\sin(k+\frac{1}{2})t=\frac{\sin^2\frac{nt}{2}}{\sin\frac{t}{2}}$, откуда из выражения

$$\sigma_n(x,f)=\frac{1}{n\pi}\int\limits_{-\pi}^{\pi} f(x+t)\frac{\sum\limits_{k=0}^{n-1}\sin(k+\frac{1}{2})t}{2\sin\frac{t}{2}}dt$$

следует справедливость формулы (**).

Пример 2. Для функции $f(z)\equiv 1$ получается, что

$$\frac{1}{n\pi}\int\limits_{-\pi}^{\pi}\frac{\sin^2\frac{nt}{2}}{2\sin^2\frac{t}{2}}dt=1. \qquad (\tilde{**})$$

§5 Теорема Фейера

Теорема 9. *Если функция $f(x)$ непрерывна на отрезке $[-\pi,\pi]$ и на концах отрезка принимает равные значения, то чезаровские средние $\sigma_n(x,f)$ ТРФ этой функции равномерно на $[-\pi,\pi]$ сходятся к $f(x)$.*

Доказательство. Продолжим f периодически на всю прямую, после такого продолжения она будет равномерно непрерывна на сегменте $[-2\pi, 2\pi]$, тогда для любого $\varepsilon > 0$ существует такое $\delta > 0$, что для всех $x \in [-\pi, \pi]$ и для любого $|t| < \delta$ выполняется

$$|f(x+t) - f(x)| < \frac{\varepsilon}{2}. \tag{1}$$

Из $(\tilde{**})$ вытекает, что для любого x

$$f(x) = \frac{1}{n\pi} \int\limits_{-\pi}^{\pi} f(x) \frac{\sin^2 \frac{nt}{2}}{2\sin^2 \frac{t}{2}} dt,$$

и поэтому (считая $\delta < \pi$)

$$\sigma_n(x, f) - f(x) = \frac{1}{n\pi} \int\limits_{-\pi}^{\pi} [f(x+t) - f(x)] \frac{\sin^2 \frac{nt}{2}}{2\sin^2 \frac{t}{2}} dt = I_1 + I_2,$$

где

$$I_1 = \frac{1}{n\pi} \int\limits_{-\delta}^{\delta} f(x) \frac{\sin^2 \frac{nt}{2}}{2\sin^2 \frac{t}{2}} dt,$$

$$I_2 = \frac{1}{n\pi} \int\limits_{\delta \leqslant |t| \leqslant \pi} [f(x+t) - f(x)] \frac{\sin^2 \frac{nt}{2}}{2\sin^2 \frac{t}{2}} dt.$$

Докажем, что $|I_1| < \frac{\varepsilon}{2}$ и $|I_2| < \frac{\varepsilon}{2}$ для любого n и для любого $x \in [-\pi, \pi]$. Используя положительность $\Psi_n(t)$ и равенство $(\tilde{**})$, имеем

$$|I_1| \leqslant \frac{\varepsilon}{2} \cdot \frac{1}{\pi n} \int\limits_{-\delta}^{\delta} \Psi_n(t) dt \leqslant \frac{\varepsilon}{2} \cdot \frac{1}{\pi n} \int\limits_{-\pi}^{\pi} \Psi_n(t) dt \leqslant \frac{\varepsilon}{2}.$$

Так как $f(x)$ непрерывна на отрезке $[-\pi, \pi]$, то существует такое число $M > 0$, что для всех $x \in [-\pi, \pi]$ справедливо

$$|f(x+t) - f(x)| \leqslant 2M. \tag{2}$$

Так как $\sin^2 \frac{nt}{2} \leqslant 1$, и для всех $\delta \leqslant |t| \leqslant \pi$ выполняется

$$\frac{1}{2\sin^2 \frac{t}{2}} \leqslant \frac{1}{2\sin^2 \frac{\delta}{2}}, \tag{3}$$

то из (2), (3) получаем

$$|I_2| \leqslant \frac{2M}{\pi n} \frac{1}{2\sin^2 \frac{\delta}{2}} \int\limits_{\delta \leqslant |t| \leqslant \pi} \leqslant \frac{2M}{\sin^2 \frac{\delta}{2}}.$$

Тогда существует N такое, что для любых номеров $n > N$ справедливо $|I_2| \leqslant \frac{\varepsilon}{2}$.

Теорема доказана.

5° Теорема Вейерштрасса о равномерном приближении непрерывной функции тригонометрическими многочленами.

Определение. Тригонометрическим многочленом называется произвольная линейная комбинация конечного числа элементов тригонометрической системы, т.е. выражение вида

$$T(x) = c_0 + \sum_{k=1}^{n} (\overline{c}_k \cos kx + \overline{\overline{c}}_k \sin kx),$$

где c_0, $\overline{c}_k$, $\overline{\overline{c}}_k$ — произвольные числа.

Теорема 10 (Вейерштрасс). *Пусть $f(x)$ непрерывна на отрезке $[-\pi, \pi]$ и ее значения на концах этого отрезка совпадают. Тогда для этой функции и для произвольного $\varepsilon > 0$ найдется тригонометрический многочлен $T(x)$ такой, что для всех $x \in [-\pi, \pi]$ выполняется неравенство $|f(x) - T(x)| < \varepsilon$.*

Доказательство. В силу теоремы Фейера для рассматриваемой функции и для произвольного $\varepsilon > 0$ существует такое чезаровское среднее $\sigma_n(x, f)$ с достаточно большим номером n, что для любого $x \in [-\pi, \pi]$ справедливо $|f(x) - \sigma_n(x, f)| < \varepsilon$. Так как чезаровские средние также являются тригонометрическими многочленами, то теорема доказана.

6° Теорема Вейерштрасса об аппроксимации непрерывной функции алгебраическими многочленами.

Теорема 11. *Если $f(x)$ непрерывна на отрезке $[a,b]$, тогда для f и для произвольного $\varepsilon > 0$ найдется алгебраический многочлен $P(x)$ такой, что для всех $x \in [a,b]$ выполняется $|f(x) - P(x)| < \varepsilon$.*

Доказательство.

1 шаг Фиксируем произвольно $\varepsilon > 0$, тогда по теореме 3.2 найдется тригонометрический многочлен $T(x)$ такой, что для любого $x \in [-\pi, \pi]$ выполняется

$$|f(x) - T(x)| < \frac{\varepsilon}{2}. \tag{4}$$

Каждая из функций, входящая в $T(x)$, разложима в ряд Маклорена с радиусом сходимости, равным бесконечности. Тогда конечные комбинации этих функций также разложимы в степенной ряд с тем же радиусом сходимости. Так как ряд для $T(x)$ сходится равномерно на сегменте $[-\pi, \pi]$, то для фиксированного нами $\varepsilon > 0$ можно взять сумму $P_n(x)$ функции $T(x)$ такую, что

$$|P_n(x) - T(x)| < \frac{\varepsilon}{2}. \tag{5}$$

Из (4), (5) и неравенства треугольника получаем оценку

$$|f(x) - P_n(x)| \leqslant |f(x) - T(x)| + |T(x) - P_n(x)| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon.$$

2 шаг Покажем, что утверждение 1-го шага справедливо для функций, непрерывных на отрезке $[-\pi, \pi]$, для которых значения на концах отрезка не совпадают.

Пусть $f(x)$ непрерывна на отрезке $[-\pi, \pi]$; обозначим $f(x) = g(x) + Ax + B$, где $A = \frac{f(\pi) - f(-\pi)}{2\pi}$, $B = \frac{f(\pi) + f(-\pi)}{2}$. Очевидно, что $g(\pi) = g(-\pi) = 0$. Тогда для $g(x)$ в силу шага 1 существует $P(x)$: $|g(x) - P(x)| < \varepsilon$. Пусть $P_0(x) = P(x) + Ax + B$, тогда $|f(x) - P_0(x)| = |g(x) + Ax + B - P(x) - Ax - B| = |g(x) - P(x)| < \varepsilon$.

6° Теорема Вейерштрасса об аппроксимации непрерывной функции алгебраическими многочленами.

Теорема 11. *Если $f(x)$ непрерывна на отрезке $[a,b]$, тогда для f и для произвольного $\varepsilon > 0$ найдется алгебраический многочлен $P(x)$ такой, что для всех $x \in [a,b]$ выполняется $|f(x) - P(x)| < \varepsilon$.*

Доказательство.

1 шаг Фиксируем произвольно $\varepsilon > 0$, тогда по теореме 3.2 найдется тригонометрический многочлен $T(x)$ такой, что для любого $x \in [-\pi, \pi]$ выполняется

$$|f(x) - T(x)| < \frac{\varepsilon}{2}. \tag{4}$$

Каждая из функций, входящая в $T(x)$, разложима в ряд Маклорена с радиусом сходимости, равным бесконечности. Тогда конечные комбинации этих функций также разложимы в степенной ряд с тем же радиусом сходимости. Так как ряд для $T(x)$ сходится равномерно на сегменте $[-\pi, \pi]$, то для фиксированного нами $\varepsilon > 0$ можно взять сумму $P_n(x)$ функции $T(x)$ такую, что

$$|P_n(x) - T(x)| < \frac{\varepsilon}{2}. \tag{5}$$

Из (4), (5) и неравенства треугольника получаем оценку

$$|f(x) - P_n(x)| \leqslant |f(x) - T(x)| + |T(x) - P_n(x)| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon.$$

2 шаг Покажем, что утверждение 1-го шага справедливо для функций, непрерывных на отрезке $[-\pi, \pi]$, для которых значения на концах отрезка не совпадают.

Пусть $f(x)$ непрерывна на отрезке $[-\pi, \pi]$; обозначим $f(x) = g(x) + Ax + B$, где $A = \frac{f(\pi) - f(-\pi)}{2\pi}$, $B = \frac{f(\pi) + f(-\pi)}{2}$. Очевидно, что $g(\pi) = g(-\pi) = 0$. Тогда для $g(x)$ в силу шага 1 существует $P(x)$: $|g(x) - P(x)| < \varepsilon$. Пусть $P_0(x) = P(x) + Ax + B$, тогда $|f(x) - P_0(x)| = |g(x) + Ax + B - P(x) - Ax - B| = |g(x) - P(x)| < \varepsilon$.

3 шаг Пусть $f(x)$ непрерывна на отрезке $[a, b]$, введем линейную замену переменной $t = \alpha x + \beta$, где $\alpha = \frac{b-a}{2\pi}$, $\beta = \frac{b+a}{2}$. При такой замене сегмент $a \leqslant t \leqslant b$ преобразуется в сегмент $-\pi \leqslant x \leqslant \pi$ и $f(x)$ переходит в непрерывную на отрезке $[-\pi, \pi]$ функцию (суперпозиция непрерывной и линейной функции есть непрерывная функция). По 2-му шагу для $f(\alpha x + \beta)$ и для любого $\varepsilon > 0$ найдется алгебраический многочлен $P(x)$ такой, что для любого $x \in [-\pi, \pi]$ $|f(\alpha x + \beta) - P(x)| < \varepsilon$. Проводя обратную замену, получим $|f(t) - P(\frac{t-\beta}{2})| < \varepsilon$ для любых $t \in [a, b]$.

Теорема доказана.

7° Замкнутость тригонометрической системы функций в псевдоевклидовом пространстве $\mathcal{L}^2_{\mathcal{R}}[-\pi, \pi]$ функций, интегрируемых по Риману на отрезке $[-\pi, \pi]$.

Теорема 3.4. *Тригонометрическая система замкнута в пространстве* $\mathcal{L}^2_{\mathcal{R}}[-\pi, \pi]$.

Доказательство. Требуется доказать, что для любой $f(x) \in \mathcal{L}^2_{\mathcal{R}}[-\pi, \pi]$ и для любого $\varepsilon > 0$ найдется тригонометрический многочлен $T(x)$ такой, что

$$|| f(x) - T(x) || = \sqrt{\int\limits_{-\pi}^{\pi} [f(x) - T(x)]^2 d\, x} < \varepsilon.$$

1 шаг Докажем, что для любой $f(x) \in \mathcal{L}^2_{\mathcal{R}}[-\pi, \pi]$ и для любого $\varepsilon > 0$ существует кусочно-непрерывная на $[-\pi, \pi]$ такая функция $f_1(x)$, что $||f(x) - f_1(x)|| < \frac{\varepsilon}{3}$.

2 шаг Для любой кусочно-непрерывной на $[-\pi, \pi]$ функции $f_1(x)$ и для любого $\varepsilon > 0$ существует строго непрерывная на $[-\pi, \pi]$ функция $g(x)$, принимающая на концах отрезка равные значения и такая, что $||g(x) - f_1(x)|| < \frac{\varepsilon}{3}$.

3 шаг Для любой строго непрерывной на $[-\pi, \pi]$ функции $g(x)$, принимающей на концах отрезка равные значения, и для любого $\varepsilon > 0$ существует тригонометрический многочлен $T(x)$ такой, что $||g(x) - T(x)|| < \frac{\varepsilon}{3}$.

Тогда из проведенных рассуждений и неравенства Минковского (треугольника) следует справедливость теоремы.

Доказательство 1-го шага: т.к. $f(x)$ интегрируема на $[-\pi, \pi]$, то она ограничена на этом отрезке некоторым числом $M > 0$. Из теории Дарбу следует, что для любого $\varepsilon > 0$ существует разбиение $-\pi = x_0 < x_1 < \cdots < x_n = \pi$ сегмента $[-\pi, \pi]$ на частичные сегменты $[x_{k-1}, x_k]$ столь малой длины, что

$$\left\| \int_{-\pi}^{\pi} f(x)dx - \underline{S} \right\| \leqslant \frac{\varepsilon^2}{18M} \tag{6}$$

Вспомним, что $\underline{S} = \sum_{k=1}^{n} m_k(x_k - x_{k-1})$, где $m_k = \inf_{[x_{k-1}, x_k]} f(x)$.

Введем функцию

$$f_1(x) = \begin{cases} m_k & \text{при } x_{k-1} < x < x_k,\ k = \overline{1, n} \\ 0 & \text{при } x = x_k\ , k = \overline{0, n}. \end{cases}$$

Заметим, что $\int_{-\pi}^{\pi} f_1(x)dx = \underline{S}$, тогда $\int_{-\pi}^{\pi} f(x)dx - \int_{-\pi}^{\pi} f_1(x)dx < \frac{\varepsilon^2}{18M}$ и так как разность $f(x) - f_1(x)$ всюду неотрицательна, то $\int_{-\pi}^{\pi} |f(x) - f_1(x)|dx < \frac{\varepsilon^2}{18M}$.

Имеем

$$\int_{-\pi}^{\pi} [f(x) - f_1(x)]^2 dx \leqslant \int_{-\pi}^{\pi} |f(x) - f_1(x)|[|f(x)| + |f_1(x)|]dx \leqslant$$

$$2M \int_{-\pi}^{\pi} |f(x) - f_1(x)|dx \leqslant \frac{\varepsilon^2}{9},$$

т.е. 1-ый шаг доказан.

Отсюда для любой только интегрируемой по Риману функции получаем $a_k \to 0$, $b_k \to 0$ при $k \to \infty$.

(2) ТРФ функции $f(x) \in \mathcal{L}^2_{\mathcal{R}}[-\pi, \pi]$ на этом сегменте сходится в среднем к $f(x)$.

(3) ТРФ функции $f(x) \in \mathcal{L}^2_{\mathcal{R}}[-\pi, \pi]$ можно интегрировать почленно.

(4) Две различные кусочно-непрерывные на отрезке $[-\pi, \pi]$ функции имеют различные коэффициенты Фурье.

9° Малая теорема Фейера.

В дальнейшем рассматривается 2π-периодическая функция, интегрируемая по любому конечному сегменту. Допустим, что в некоторой точке $x_0 \in [-\pi, \pi]$ ее ТРФ сходится и известно, что разлагаемая в ТРФ функция непрерывна в точке x_0, либо имеет разрыв 1-го рода. Оказывается, что в этом случае ТРФ в точке x_0 сходится к $\frac{f(x_0+0)+f(x_0-0)}{2}$.

Теорема 3.4. *Пусть $f(x)$ — 2π-периодическая и интегрируемая по любому конечному сегменту функция и пусть в точке $x_0 \in [-\pi, \pi]$ у f существует конечный правый и конечный левый предел (они могут совпадать). Тогда чезаровские средние $\sigma_n(x_0, f)$ при $n \to \infty$ сходятся к $\frac{f(x_0+0)+f(x_0-0)}{2}$. В частности, в случае непрерывности чезаровские средние сходятся к $f(x_0)$.*

Заметим, что сходимость ТРФ к некоторому пределу влечет сходимость средних арифметических к этому же пределу.

Доказательство теоремы 3.4. В силу четности ядра Фейера имеем

$$\frac{1}{\pi n} \int_0^{\pi} \frac{\sin^2 \frac{nt}{2}}{\sin^2 \frac{t}{2}} dt = \frac{1}{\pi n} \int_{-\pi}^{0} \frac{\sin^2 \frac{nt}{2}}{\sin^2 \frac{t}{2}} dt = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{\pi n} \int_{-\pi}^{\pi} \frac{\sin^2 \frac{nt}{2}}{\sin^2 \frac{t}{2}} dt = \frac{1}{2}.$$

Отсюда получается, что

$$\sigma_n(x_0, f) - \frac{f(x_0+0)+f(x_0-0)}{2} =$$

$$= \frac{1}{\pi n}\int_0^{\pi}[f(x_0+t) - f(x_0+0)]\Psi_n(t)dt +$$

$$+\frac{1}{\pi n}\int_{-\pi}^{0}[f(x_0+t) - f(x_0-0)]\Psi_n(t)dt. \qquad (9)$$

Фиксируем $\varepsilon > 0$, тогда (в силу существования односторонних пределов) найдется $\delta > 0$ такое, что $|f(x_0+t) - f(x_0+0)| < \frac{\varepsilon}{3}$ для всех $0 < t < \delta$ и $|f(x_0-t) - f(x_0-0)| < \frac{\varepsilon}{3}$ для всех $-\delta < t < 0$. Поэтому разность, стоящая в левой части (9), может быть представлена в виде суммы интегралов $I_1 + I_2 + I_3 + I_4 + I_5 + I_6$, где

$$I_1 = \frac{1}{\pi n}\int_0^{\delta}[f(x_0+t) - f(x_0+0)]\Psi_n(t)dt,$$

$$I_2 = \frac{1}{\pi n}\int_{-\delta}^{0}[f(x_0+t) - f(x_0-0)]\Psi_n(t)dt,$$

$$I_3 = \frac{1}{\pi n}\int_{\delta}^{\pi} f(x_0+t)\Psi_n(t)dt,$$

$$I_4 = \frac{1}{\pi n}\int_{-\pi}^{-\delta} f(x_0+t)\Psi_n(t)dt,$$

$$I_5 = -\frac{1}{\pi n} f(x_0+0)\int_{\delta}^{\pi}\Psi_n(t)dt,$$

$$I_6 = -\frac{1}{\pi n} f(x_0-0)\int_{-\pi}^{-\delta}\Psi_n(t)dt.$$

Оценка каждого из интегралов проводится аналогично проведенной в доказательстве теоремы 3.3.

Проведем рассуждения для оценки I_1:

$$|I_1| \leqslant \frac{1}{\pi n}\int\limits_0^\delta |f(x_0+t)-f(x_0+0)|\Psi_n(t)dt \leqslant$$

$$\leqslant \frac{\varepsilon}{3}\frac{1}{\pi n}\int\limits_0^\delta \Psi_n(t)dt \leqslant \frac{\varepsilon}{3}\frac{1}{\pi n}\int\limits_0^\pi \Psi_n(t)dt \leqslant \frac{\varepsilon}{6}.$$

Величина каждых из оставшихся интегралов также не превосходит $\frac{\varepsilon}{6}$, поэтому

$$|\sigma_n(x_0,f) - \frac{f(x_0+0)+f(x_0-0)}{2}| \leqslant \varepsilon.$$

Теорема доказана.

7° Замкнутость тригонометрической системы функций в псевдоевклидовом пространстве $\mathcal{L}^2_{\mathcal{R}}[-\pi,\pi]$ функций, интегрируемых по Риману на отрезке $[-\pi,\pi]$.

Теорема 12. *Тригонометрическая система замкнута в пространстве* $\mathcal{L}^2_{\mathcal{R}}[-\pi,\pi]$.

Доказательство. Требуется доказать, что для любой $f(x) \in \mathcal{L}^2_{\mathcal{R}}[-\pi,\pi]$ и для любого $\varepsilon > 0$ найдется тригонометрический многочлен $T(x)$ такой, что

$$||\,f(x) - T(x)\,|| = \sqrt{\int\limits_{-\pi}^{\pi}[f(x)-T(x)]^2 dx} < \varepsilon. \qquad (*)$$

Доказательство будем проводить в три шага.

1-ый шаг: Докажем, что для любой $f(x) \in \mathcal{L}^2_{\mathcal{R}}[-\pi,\pi]$ и для любого $\varepsilon > 0$ существует такая кусочно-непрерывная на $[-\pi,\pi]$ функция $f_1(x)$, что

$$||f(x) - f_1(x)|| < \frac{\varepsilon}{3}. \qquad (1)$$

2-ой шаг: Для любой кусочно-непрерывной на $[-\pi,\pi]$ функции $f_1(x)$ и для любого $\varepsilon > 0$ существует строго непрерывная на $[-\pi, \pi]$ функция $g(x)$, принимающая на концах отрезка равные значения и такая, что

$$||g(x) - f_1(x)|| < \frac{\varepsilon}{3}. \tag{2}$$

<u>3-ий шаг:</u> Для любой строго непрерывной на $[-\pi, \pi]$ функции $g(x)$, принимающей на концах отрезка равные значения, и для любого $\varepsilon > 0$ существует тригонометрический многочлен $T(x)$ такой, что

$$||g(x) - T(x)|| < \frac{\varepsilon}{3}. \tag{3}$$

Тогда из проведенных рассуждений и неравенства Минковского (треугольника) следует справедливость теоремы (неравенство (*)).

Доказательство 1-го шага: так как $f(x)$ интегрируема на $[-\pi, \pi]$, то она ограничена на этом отрезке некоторым числом $M > 0$. Из теории интеграла следует, что для любого $\varepsilon > 0$ существует разбиение $-\pi = x_0 < x_1 < \cdots < x_n = \pi$ сегмента $[-\pi, \pi]$ на частичные сегменты $[x_{k-1}, x_k]$ столь малой длины, что

$$\int\limits_{-\pi}^{\pi} f(x)dx - \underline{S} \leqslant \frac{\varepsilon^2}{18M} \tag{4}$$

Здесь нижняя интегральная сумма $\underline{S}$ определяется формулой

$$\underline{S} = \sum_{k=1}^{n} m_k(x_k - x_{k-1}),$$

где $m_k = \inf\limits_{[x_{k-1}, x_k]} f(x)$.

Введем в рассмотрение функцию

$$f_1(x) = \begin{cases} m_k & \text{при } x \in (x_{k-1}; x_k),\ k = \overline{1, n} \\ 0 & \text{при } x = x_k\ , k = \overline{0, n}. \end{cases}$$

Заметим, что $\int\limits_{-\pi}^{\pi} f_1(x)dx = \underline{S}$, тогда неравенство (4) можно будет переписать в виде

$$\int\limits_{-\pi}^{\pi} f(x)dx - \int\limits_{-\pi}^{\pi} f_1(x)dx = \int\limits_{-\pi}^{\pi} [f(x)dx - f_1(x)]dx < \frac{\varepsilon^2}{18M}. \tag{4*}$$

Так как разность $f(x)-f_1(x)$ всюду положительна (кроме конечного числа точек, в которых она обращается в ноль), то формула (4*) перепишется в виде

$$\int_{-\pi}^{\pi} |f(x)-f_1(x)|dx < \frac{\varepsilon^2}{18M}. \tag{5}$$

Имеем

$$\int_{-\pi}^{\pi} [f(x)-f_1(x)]^2 dx \leqslant \int_{-\pi}^{\pi} |f(x)-f_1(x)|\Big[|f(x)|+|f_1(x)|\Big]dx \leqslant$$

$$2M\int_{-\pi}^{\pi} |f(x)-f_1(x)|dx \leqslant \frac{\varepsilon^2}{9}, \quad \text{т.е. 1-ый шаг доказан.}$$

Доказательство 2-го шага: для построенной нами $f_1(x)$ существует строго непрерывная функция $g(x)$, удовлетворяющая $g(\pi)=g(-\pi)$ такая, что

$$\int_{-\pi}^{\pi} [f(x)-f_1(x)]^2 dx \leqslant \frac{\varepsilon^2}{9}.$$

В качестве $g(x)$ возьмем функцию, совпадающую с $f_1(x)$ всюду, кроме точек $x_0, x_1, \dots, x_n$ и достаточно малых окрестностей этих точек. В окрестностях этих точек выберем сглаживающую линейную функцию так, чтобы $g(x)$ являлась уже строго непрерывной и удовлетворяла условию $g(-\pi)=g(\pi)$. Тогда

$$\int_{-\pi}^{\pi} [f_1(x)-g(x)]^2 dx = \int\limits_{\bigcup\limits_k U_{\varepsilon'}(x_k)} [f_1(x)-g(x)]^2 dx,$$

где $U_{\varepsilon'}(x_k)$ — окрестность точки x_k радиуса ε'.

По построению g ограничена ($|g(t)| \leqslant M$). Так как $[f_1(x)-g(x)]^2 \leqslant 4M^2$, то выбирая указанные окрестности достаточно малыми, можно добиться

$$\int_{-\pi}^{\pi} [f_1(x)-g(x)]^2 dx \leqslant \frac{\varepsilon^2}{9},$$

т.е. 2-ой шаг завершен.

Доказательство 3-го шага: для построенной $g(x)$ выполняются условия теоремы 10, т.е. для любого $\varepsilon > 0$ найдется тригонометрический многочлен $T(x)$ такой, что для любого $x \in [-\pi, \pi]$ выполняется неравенство

$$|g(x) - T(x)| < \frac{\varepsilon}{3\sqrt{2\pi}}. \tag{6}$$

Тогда

$$\int_{-\pi}^{\pi} [g(x) - T(x)]^2 dx \leqslant \frac{\varepsilon^2}{18\pi} \int_{-\pi}^{\pi} dx = \frac{\varepsilon^2}{9}.$$

Теорема доказана.

8° Следствия из замкнутости тригонометрической системы.

Следствие 1. *Для любой только интегрируемой на сегменте $[-\pi; \pi]$ функции $f(x)$ неравенство Бесселя переходит в точное равенство Парсеваля:*

$$\frac{a_0^2}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} (a_k^2 + b_k^2) = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f^2(x) dx.$$

Это вытекает из Теоремы 5 и Теоремы 12.

Следствие 2. *ТРФ функции $f(x) \in \mathcal{L}^2_{\mathcal{R}}[-\pi, \pi]$ на этом сегменте сходится в среднем к $f(x)$.*

Это следует из Теоремы 6 и Теоремы 12 (если еще учесть, что сходимость по норме этого пространства есть сходимость в среднем).

Следствие 3. *ТРФ функции $f(x) \in \mathcal{L}^2_{\mathcal{R}}[-\pi, \pi]$ можно интегрировать почленно.*

Это утверждение следует из того, что любой сходящийся в среднем ряд можно интегрировать почленно.

Следствие 4. *Тригонометрическая система является полной в ЕП $\widehat{C}_{[-\pi;\pi]}$, но не является полной в ПЕП $\mathcal{L}^2_{\mathcal{R}}[-\pi, \pi]$.*

Следствие 5. *Две различные кусочно-непрерывные на отрезке $[-\pi, \pi]$ функции имеют различные коэффициенты Фурье.*

9° Малая теорема Фейера.

Теорема 13. *Пусть $f(x)$ — 2π-периодическая и интегрируемая по любому конечному сегменту функция и пусть в точке $x_0 \in [-\pi, \pi]$ функция f имеет конечный правый и левый пределы $f(x_0+0)$ и $f(x_0-0)$ соответственно (они могут совпадать). Тогда чезаровские средние $\sigma_n(x_0, f)$ при $n \to \infty$ сходятся к $\frac{1}{2}[f(x_0+0)+f(x_0-0)]$. В частности, в случае непрерывности чезаровские средние сходятся к $f(x_0)$.*

Заметим, что сходимость ТРФ к некоторому пределу влечет сходимость средних арифметических к этому же пределу.

Доказательство. Вспомним, что

$$\sigma_n(x_0, f) = \frac{1}{\pi n} \int\limits_{-\pi}^{0} f(x_0+t)\Psi_n(t)dt, \tag{1}$$

где $\Psi_n(t) = \frac{\sin^2 \frac{nt}{2}}{\sin^2 \frac{t}{2}}$ — ядро Фейера.

В силу четности ядра Фейера имеем

$$\frac{1}{\pi n}\int\limits_{0}^{\pi} \Psi_n(t)dt = \frac{1}{\pi n}\int\limits_{-\pi}^{0} \Psi_n(t)dt = \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{\pi n}\int\limits_{-\pi}^{\pi} \Psi_n(t)dt = \frac{1}{2}. \tag{2}$$

Отсюда получается, что

$$\sigma_n(x_0, f) - \frac{1}{2}[f(x_0+0)+f(x_0-0)] =$$
$$\frac{1}{\pi n}\int\limits_{0}^{\pi} [f(x_0+t)-f(x_0+0)]\Psi_n(t)dt +$$
$$\frac{1}{\pi n}\int\limits_{-\pi}^{0} [f(x_0+t)-f(x_0-0)]\Psi_n(t)dt. \tag{3}$$

Покажем, что выражение (3) стремится к нулю при $n \to \infty$. Фиксируем $\varepsilon > 0$, тогда (в силу существования односторонних пределов) найдется такое $\delta > 0$, зависящее от ε, что

$$|f(x_0 + t) - f(x_0 + 0)| < \frac{\varepsilon}{3} \tag{4}$$

для всех $0 < t < \delta$ и

$$|f(x_0 - t) - f(x_0 - 0)| < \frac{\varepsilon}{3} \tag{5}$$

для всех $-\delta < t < 0$. Представим правую часть выражения (3) в виде суммы интегралов $I_1 + I_2 + I_3 + I_4 + I_5 + I_6$, где

$$I_1 = \frac{1}{\pi n} \int\limits_0^{\delta} [f(x_0 + t) - f(x_0 + 0)] \Psi_n(t) dt,$$

$$I_2 = \frac{1}{\pi n} \int\limits_{-\delta}^{0} [f(x_0 + t) - f(x_0 - 0)] \Psi_n(t) dt,$$

$$I_3 = \frac{1}{\pi n} \int\limits_{\delta}^{\pi} f(x_0 + t) \Psi_n(t) dt,$$

$$I_4 = \frac{1}{\pi n} \int\limits_{-\pi}^{-\delta} f(x_0 + t) \Psi_n(t) dt,$$

$$I_5 = -\frac{1}{\pi n} f(x_0 + 0) \int\limits_{\delta}^{\pi} \Psi_n(t) dt,$$

$$I_6 = -\frac{1}{\pi n} f(x_0 - 0) \int\limits_{-\pi}^{-\delta} \Psi_n(t) dt.$$

Покажем, что каждый из этих интегралов при всех достаточно больших номерах n меньше $\frac{\varepsilon}{6}$.

Проведем рассуждения для оценки I_1, воспользовавшись неравенством (4):

$$|I_1| \leqslant \frac{\varepsilon}{3}\frac{1}{\pi n}\int\limits_0^{\delta} \Psi_n(t)dt \leqslant \frac{\varepsilon}{3}\frac{1}{\pi n}\int\limits_0^{\pi} \Psi_n(t)dt \leqslant \frac{\varepsilon}{6}.$$

Аналогично оценивается I_2.

Для оценки оставшихся интегралов воспользуемся ограниченностью интегрируемой функции (следовательно $|f(x_0+t)| \leqslant M$, $|f(x_0+0)| \leqslant M$, $|f(x_0-0)| \leqslant M$) и неравенством $\frac{1}{2\sin^2\frac{t}{2}} \leqslant \frac{1}{2\sin^2\frac{\delta}{2}}$, справедливым при $\delta \leqslant |t| \leqslant \pi$.

Отсюда видно, что величина каждых из оставшихся интегралов не превосходит $\frac{\varepsilon}{6}$, поэтому теорема доказана.

10°. К чему может сходиться ТРФ функции, которая в данной точке имеет либо конечные правый и левый пределы, либо непрерывна в этой точке?

Допустим, что в некоторой точке $x_0 \in [-\pi, \pi]$ ее ТРФ сходится и известно, что разлагаемая в ТРФ функция непрерывна в точке x_0, либо имеет разрыв 1-го рода (конечный правый и левый пределы). Оказывается, что в этом случае ТРФ в точке x_0 сходится к $\frac{1}{2}[f(x_0+0)+f(x_0-0)]$.

Действительно, так как метод средних арифметических регулярен, то чезаровские средние $\sigma_n(x_0, f)$ сходятся к тому же значению, что и ТРФ функции $f(x)$ в точке x_0. По Теореме 13 это значение равно $\frac{1}{2}[f(x_0+0)+f(x_0-0)]$.

§4. Простейшие условия равномерной сходимости и почленного дифференцирования ТРФ

1° Вводные замечания.

Основным вопросом теории ТРФ является выяснение условий сходимости ТРФ в точке и равномерной сходимости на отрезке $[-\pi, \pi]$ или на какой-то его части $[a, b] \subset [-\pi, \pi]$.

Будем говорить, что некоторое свойство (А) справедливо *почти всюду на сегменте* $[-\pi; \pi]$, если множество всех точек сегмента $[-\pi;\pi]$, в которых это неравенство не выполняется, для любого $\varepsilon > 0$ можно заключить внутрь не более чем счетного числа интервалов таких, что сумма ряда из длин этих интервалов меньше ε.

Краткая историческая справка. В 1876 году Дюбуа Раймон построил пример непрерывной на отрезке $[-\pi, \pi]$ функции $f(x)$, принимающей на концах интервала одинаковые значения и такой, что ее ТРФ расходится на множестве точек, всюду плотно покрывающем этот сегмент (заметим, что при этих же условиях чезаровские средние сходятся равномерно). Далее возник вопрос, должен ли ТРФ произвольной только интегрируемой на $[a, b]$ или непрерывной на этом отрезке функции сходиться хотя бы в одной точке. До 1966 года ответа на этот вопрос не было, затем в работе шведского математика Л. Карлесона была решена следующая задача, поставленная в 1914 году Н.Н. Лузиным:

пусть функция $f(x)$ допускает интеграл

$$\int_{-\pi}^{\pi} f^2(x)\,dx, \tag{1}$$

понимаемый в смысле Лебега, тогда ее ТРФ сходится почти всюду на сегменте $[-\pi;\pi]$.

В 1967 году американский математик Хант доказал, что если $f(x)$ допускает интеграл Лебега

$$\int_{-\pi}^{\pi} |f(x)|^p\,dx, \qquad p > 1, \tag{2}$$

то ее ТРФ сходится почти всюду.

В 1923 году А.Н. Колмогоров построил пример функции, допускающей понимаемый в смысле Лебега интеграл (2) при $p = 1$ с почти всюду расходящимся ТРФ, частичные суммы которого стремились к бесконечности. Марцинкевич показал, что существует функция, удовлетворяющая перечисленным условиям, ТРФ которой расходится почти всюду, но частичные суммы ограничены. В 1926 году А.Н. Колмогоров привел пример функции из $L_1[-\pi,\pi]$ с расходящимся всюду на отрезке $[-\pi,\pi]$ ТРФ.

2° Простейшие условия равномерной сходимости ТРФ.

Определение 1. Будем говорить, что функция $f(x)$ имеет на сегменте $[-\pi,\pi]$ кусочно-непрерывную производную, если

(1) $f(x)$ всюду на $(-\pi,\pi)$ кроме, быть может, конечного числа точек, имеет обычный двусторонний предел;
(2) $f'(x)$ имеет конечные правые и левые пределы;
(3) существуют конечные односторонние пределы $f'(\pi-0)$ и $f'(-\pi+0)$ на концах интервала.

Определение 2. Будем говорить, что функция $f(x)$ имеет на сегменте $[-\pi,\pi]$ кусочно-непрерывную производную $f^{(m+1)}(x)$, если функция $f^{(m)}(x)$ имеет кусочно-непрерывную производную, понимаемую в смысле определения 1.

Теорема 1. *Если $f(x)$ непрерывна на отрезке $[-\pi,\pi]$, имеет кусочно-непрерывную производную и $f(\pi)=f(-\pi)$, то ТРФ этой функции сходится равномерно к ней на этом отрезке. Более того, при тех же условиях равномерно сходится ряд*

$$\frac{|a_0|}{2}+\sum_{k=1}^{\infty}\Big[|a_k||\cos kx|+|b_k||\sin kx|\Big]. \tag{1}$$

Доказательство. Согласно критерию Коши достаточно доказать, что на отрезке $[-\pi,\pi]$ равномерно сходится ряд (1). Воспользуемся критерием Вейерштрасса и докажем, что сходится числовой ряд

$$\sum_{k=1}^{\infty}(|a_k|+|b_k|), \tag{2}$$

мажорирующий функциональный ряд (1).

Дополнив функцию $f'(x)$ как угодно в точках разрыва, обозначим через α_k и β_k её тригонометрические коэффициенты Фурье, т.е.

$$\alpha_k = \frac{1}{\pi}\int\limits_{-\pi}^{\pi} f'(x)\cos kx\,dx, \qquad \beta_k = \frac{1}{\pi}\int\limits_{-\pi}^{\pi} f'(x)\sin kx\,dx.$$

Интегрируя по частям и замечая, что условие $f(-\pi) = f(\pi)$ ликвидирует подстановки, получаем

$$\alpha_k = \frac{1}{\pi}\int\limits_{-\pi}^{\pi} f'(x)\cos kx\,dx = k\cdot\frac{1}{\pi}\int\limits_{-\pi}^{\pi} f(x)\sin kx\,dx = k\cdot b_k.$$

Аналогично получаем $\beta_k = -k\cdot a_k$.

Мы показали, что $|a_k| + |b_k| = \frac{1}{k}[|\alpha_k| + |\beta_k|]$ и для доказательства сходимости ряда (2) достаточно доказать сходимость ряда

$$\sum_{k=1}^{\infty}\frac{|\alpha_k| + |\beta_k|}{k}. \tag{3}$$

Из неравенства $|A|\cdot|B| \leqslant \frac{|A^2|+|B^2|}{2}$ вытекает, что

$$\begin{aligned}\frac{|\alpha_k|}{k} &\leqslant \frac{1}{2}(\alpha_k + \frac{1}{k^2})\\ \frac{|\beta_k|}{k} &\leqslant \frac{1}{2}(\beta_k + \frac{1}{k^2}).\end{aligned} \tag{4}$$

Сходимость ряда (3) получается из (4) и сходимости рядов

$$\sum_{k=1}^{\infty}(\alpha_k^2 + \beta_k^2), \qquad \sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{k^2}, \tag{5}$$

первый из которых сходится в силу справедливости равенства Парсеваля для кусочно-непрерывной функции $f'(x)$, а второй — по интегральному признаку Коши.

Теорема доказана.

3° Простейшие условия почленного дифференцирования ТРФ.

Дополнив функцию $f'(x)$ как угодно в точках разрыва, обозначим через α_k и β_k её тригонометрические коэффициенты Фурье, т.е.

$$\alpha_k = \frac{1}{\pi}\int\limits_{-\pi}^{\pi} f'(x)\cos kx\,dx, \qquad \beta_k = \frac{1}{\pi}\int\limits_{-\pi}^{\pi} f'(x)\sin kx\,dx.$$

Интегрируя по частям и замечая, что условие $f(-\pi) = f(\pi)$ ликвидирует подстановки, получаем

$$\alpha_k = \frac{1}{\pi}\int\limits_{-\pi}^{\pi} f'(x)\cos kx\,dx = k\cdot\frac{1}{\pi}\int\limits_{-\pi}^{\pi} f(x)\sin kx\,dx = k\cdot b_k.$$

Аналогично получаем $\beta_k = -k\cdot a_k$.

Мы показали, что $|a_k| + |b_k| = \frac{1}{k}[|\alpha_k| + |\beta_k|]$ и для доказательства сходимости ряда (2) достаточно доказать сходимость ряда

$$\sum_{k=1}^{\infty}\frac{|\alpha_k| + |\beta_k|}{k}. \tag{3}$$

Из неравенства $|A|\cdot|B| \leqslant \frac{|A^2|+|B^2|}{2}$ вытекает, что

$$\begin{aligned}\frac{|\alpha_k|}{k} &\leqslant \frac{1}{2}(\alpha_k + \frac{1}{k^2})\\ \frac{|\beta_k|}{k} &\leqslant \frac{1}{2}(\beta_k + \frac{1}{k^2}).\end{aligned} \tag{4}$$

Сходимость ряда (3) получается из (4) и сходимости рядов

$$\sum_{k=1}^{\infty}(\alpha_k^2 + \beta_k^2), \qquad \sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{k^2}, \tag{5}$$

первый из которых сходится в силу справедливости равенства Парсеваля для кусочно-непрерывной функции $f'(x)$, а второй — по интегральному признаку Коши.

Теорема доказана.

3° Простейшие условия почленного дифференцирования ТРФ.

Будем говорить, что функция $f(x)$ удовлетворяет трем условиям (A), если

(1) для целого $m \geqslant 1$ сама $f(x)$ и ее производные до m-го порядка включительно непрерывны на сегменте $[-\pi, \pi]$;

(2) $f(x)$ имеет на $[-\pi, \pi]$ кусочно-непрерывные производные до (m+1)-го порядка включительно;

(3) $f(\pi) = f(-\pi),\ f'(\pi) = f'(-\pi),\ \ldots,\ f^{(m)}(\pi) = f^{(m)}(-\pi)$.

Теорема 15. *Если $f(x)$ при $m \geqslant 1$ удовлетворяет трем условиям (A), то ТРФ этой функции можно дифференцировать на рассматриваемом сегменте почленно m раз, причем полученный (m-кратным дифференцированием) ряд на этом сегменте равномерно сходится (к соответствующей производной функции f).*

Докажем вспомогательную лемму:

Лемма. *При выполнении для $f(x)$ трех условий (A) ряд*

$$\sum_{k=1}^{\infty} k^m(|a_k| + |b_k|), \tag{6}$$

где a_k, b_k — тригонометрические коэффициенты Фурье функции $f(x)$, сходится.

Доказательство. Пусть α_k, β_k — тригонометрические коэффициенты функции $f^{m+1}(x)$. Интегрируя по частям (m+1) раз α_k и β_k и учитывая обращение в нуль всех подстановок, получим

$$|\alpha_k| + |\beta_k| = k^{m+1}(|a_k| + |b_k|).$$

Из этого равенства вытекает, что сходимость ряда (6) равносильна сходимости ряда (3) и лемма доказана.

Для доказательства теоремы 2 заметим, что ряд, полученный s-кратным почленным дифференцированием ТРФ, равен

$$\sum_{k=1}^{\infty} [a_k \cos(kx + \frac{\pi}{2}s) + b_k \sin(kx + \frac{\pi}{2}s)], \qquad (s = 1, 2, \ldots m). \tag{7}$$

При любом $s \leqslant m$ этот ряд мажорируется рядом (6), поэтому согласно признаку Вейерштрасса сходится равномерно.

Теорема доказана.

§5 Более точные условия сходимости ТРФ. Принцип локализации Римана

1°. Обычный и интегральный модуль непрерывности и их основные свойства.

Определение 1. Пусть функция $f(x)$ непрерывна на отрезке $[-\pi, \pi]$. Тогда для любого $\delta > 0$ назовем величину

$$w(\delta, f) = \sup_{\substack{x, x+h \in [-\pi, \pi] \\ |h| < \delta}} |f(x+h) - f(x)|$$

(обычным) модулем непрерывности функции $f(x)$.

Определение 2. Пусть функция $f(x)$ 2π-периодична и интегрируема по любому конечному сегменту. Тогда для любого $\delta > 0$ назовем величину

$$\widehat{w}(\delta, f) = \sup_{|h| \leqslant \delta} \int\limits_{-\pi}^{\pi} |f(x+h) - f(x)|\, dx$$

интегральным модулем непрерывности функции $f(x)$.

Ясно, что $w(\delta, f)$ и $\widehat{w}(\delta, f)$ являются неубывающими функциями от δ. Кроме того, из теоремы Кантора о равномерной сходимости непрерывной на компакте функции следует, что $w(\delta, f) \to 0$ при $\delta \to 0 + 0$.

Лемма 1. *Если функция $f(x)$ периодична с периодом 2π и интегрируема по любому конечному сегменту, то ее интегральный модуль непрерывности $\widehat{w}(\delta, f) \to 0$ при $\delta \to 0 + 0$.*

Доказательство. Фиксируем произвольное $\varepsilon > 0$, требуется доказать, что существует $\delta = \delta(\varepsilon)$ такое, что для любого $|h| < \delta$ выполняется $\int_{-\pi}^{\pi} |f(x+h) - f(x)|\, dx \leqslant \varepsilon$. Заметим, что в силу теоремы о замкнутости тригонометрической системы для интегрируемой функции $f(x)$ существует такая строго непрерывная функция $g(x)$, принимающая на концах сегмента одинаковые значения, что

$$||f(x)-g(x)|| = \sqrt{\int\limits_{-\pi}^{\pi} |f(x)-g(x)|^2\,dx} < \frac{\varepsilon}{3\sqrt{2\pi}}. \qquad (1)$$

Из этого неравенства и неравенства Коши-Буняковского вытекает, что

$$\int\limits_{-\pi}^{\pi} |f(x)-g(x)|\,dx \leqslant \sqrt{\int\limits_{-\pi}^{\pi} |f(x)-g(x)|^2\,dx} \cdot \sqrt{\int\limits_{-\pi}^{\pi} dx} < \frac{\varepsilon}{3}. \qquad (2)$$

Заметим, что если h — произвольное число, то из (2) следует

$$\int\limits_{-\pi}^{\pi} |f(x+h)-g(x+h)|\,dx < \frac{\varepsilon}{3}. \qquad (3)$$

Действительно,

$$\int\limits_{-\pi}^{\pi} |f(x+h)-g(x+h)|\,dx = \int\limits_{-\pi+h}^{\pi+h} |f(y)-g(y)|\,dy = \int\limits_{-\pi}^{\pi} |f(y)-g(y)|\,dy < \frac{\varepsilon}{3}.$$

Теперь продолжим $g(x)$ периодически на всю прямую. Она останется непрерывной всюду, следовательно и на сегменте $[-2\pi, 2\pi]$. Поэтому для фиксированного нами $\varepsilon > 0$ существует такое $\delta > 0$, зависящее от ε, что

$$w(\delta, g) < \frac{\varepsilon}{6\pi}. \qquad (4)$$

Отсюда вытекает, что если возьмем произвольное $|h| < \delta$, то

$$\int\limits_{-\pi}^{\pi} |f(x)-g(x)|\,dx \leqslant w(\delta, g) \int\limits_{-\pi}^{\pi} dx < \frac{\varepsilon}{3}. \qquad (5)$$

Из (2), (3), (5) и неравенства треугольника получим, что при произвольном $|h| < \delta$ справедливо

$$\int_{-\pi}^{\pi} |f(x+h) - f(x)|\,dx \leqslant \int_{-\pi}^{\pi} |f(x+h) - g(x+h)|\,dx$$

$$+ \int_{-\pi}^{\pi} |g(x+h) - g(x)|\,dx + \int_{-\pi}^{\pi} |g(x) - f(x)|\,dx < \varepsilon.$$

Тем самым $\widehat{w}(\delta, f) \to 0$ при $\delta \to 0 + 0$.

Лемма 2. *Пусть каждая из функций $f(x)$ и $g(x)$ только 2π-периодична и интегрируема по каждому конечному сегменту. Для любого $x \in (-\infty, \infty)$ обозначим*

$$F_x(t) = f(x+t)g(t). \tag{6}$$

Тогда $\widehat{w}(\delta, F) \to 0$ при $\delta \to 0+0$ равномерно относительно x на всей числовой прямой.

Доказательство. Так как $f(t)$ и $g(t)$ интегрируемы на каждом конечном сегменте, то (в силу периодичности) ограничены на $(-\infty, \infty)$ и потому существует $M > 0$ такое, что

$$|f(t)| < M, \qquad |g(t)| \leqslant M \tag{7}$$

для всех $t \in (-\infty, \infty)$. Для доказательства воспользуемся следующим фактом:

$$|F(t+h) - F(t)| = |f(t+h+x) \cdot g(t+h) - f(x+t) \cdot g(t)| =$$
$$|[f(t+h+x) - f(x+t)] \cdot g(t+h) + f(x+t) \cdot [g(t+h) - g(t)]| \leqslant$$
$$|[f(t+h+x) - f(x+t)] \cdot g(t+h)| + f(x+t) \cdot [g(t+h) - g(t)].$$

Интегрируя по t на сегменте $[-\pi, \pi]$ и учитывая, что

$|h| < \delta$, получим

$$\int_{-\pi}^{\pi} |F(t+h) - F(t)|\, dt \leqslant \int_{-\pi}^{\pi} |f(x+t+h) - f(x+t)| \cdot |g(t+h)|\, dt +$$

$$\int_{-\pi}^{\pi} |g(t+h) - g(t)| \cdot |f(x+t)|\, dt \leqslant M \int_{-\pi+x}^{\pi+x} |f(y+h) - f(y)|\, dt +$$

$$M \int_{-\pi}^{\pi} |g(t+h) - g(t)|\, dt \leqslant M\widehat{w}(\delta, f) + M\widehat{w}(\delta, g).$$

Итак, мы доказали, что при всех x выполняется

$$\widehat{w}(\delta, F) \leqslant M\widehat{w}(\delta, f) + M\widehat{w}(\delta, g).$$

Независимо от x величины $\widehat{w}(\delta, f)$ и $\widehat{w}(\delta, g)$ стремятся к нулю при $\delta \to 0+0$, следовательно $\widehat{w}(\delta, F) \to 0$ при $\delta \to 0+0$ независимо от x.

Лемма 3. *Если функция $f(x)$ только 2π-периодична и интегрируема по любому конечному сегменту, то тригонометрические коэффициенты Фурье этой функции a_n и b_n удовлетворяют неравенству*

$$\sqrt{a_n^2 + b_n^2} \leqslant \frac{1}{2\pi} \widehat{w}(\frac{\pi}{n}, f). \tag{8}$$

Доказательство. Из формулы Эйлера $e^{int} = \cos nt + i \sin nt$ вытекает, что

$$a_n + ib_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(t) e^{int}\, dt. \tag{9}$$

Введем новую переменную $\tau = t - \frac{\pi}{n}$, тогда $e^{int} = e^{in\tau} \cdot e^{i\pi} = -e^{in\tau}$ и

$$a_n + ib_n = -\frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(\tau + \pi/n) e^{in\tau}\, d\tau. \tag{10}$$

Заменим τ на t, возьмем полусумму правых и левых частей формул (9) и (10), тогда

$$a_n + ib_n = \frac{1}{\pi}\int\limits_{-\pi}^{\pi}[f(t) - f(t+\pi/n)]e^{int}\,dt,$$

$$|a_n + ib_n| \leqslant \frac{1}{2\pi}\int\limits_{-\pi}^{\pi}|f(t) - f(t+\pi/n)|\,dt \leqslant \widehat{w}(\frac{\pi}{n}, f).$$

Осталось заметить, что $|a_n + ib_n| = \sqrt{a_n^2 + b_n^2}$.

Следствие 1. *Пусть функция $f(t)$ 2π-периодична и интегрируема по каждому конечному сегменту, а $g(t)$ интегрируема на $[-\pi, \pi]$ и $F(t)$ — функция (6), зависящая от x как от параметра. Тогда тригонометрические коэффициенты Фурье*

$$a_n(x) = \frac{1}{\pi}\int\limits_{-\pi}^{\pi} f(x+t)g(t)\cos nt\,dt,$$

$$b_n(x) = \frac{1}{\pi}\int\limits_{-\pi}^{\pi} f(x+t)g(t)\sin nt\,dt$$

функции $F(t)$ стремятся к нулю при $n \to \infty$ равномерно относительно x на всей прямой.

Справедливость утверждения вытекает из того, что $\widehat{w}(\delta, F)$ стремится к 0 равномерно при $\delta \to 0+0$ и из неравенства (8).

Следствие 2. *Пусть функция $f(x)$ 2π-периодична и интегрируема по каждому конечному сегменту, а $g(x)$ интегрируема на $[-\pi, \pi]$. Тогда функциональная последовательность*

$$C_n(x) = \frac{1}{\pi}\int\limits_{-\pi}^{\pi} f(x+t)g(t)\sin(n+1/2)t\,dt \qquad (11)$$

стремится к нулю при $n \to \infty$ равномерно относительно x на всей прямой.

Действительно, для проверки достаточно воспользоваться формулой синуса суммы и в предыдущем следствии для $a_n(x)$ в качестве $g(t)$ взять $g(t)\cos\frac{t}{2}$, а для $b_n(x)$ в качестве $g(t)$ взять $g(t)\sin\frac{t}{2}$.

Лемма 4. *Пусть функция $f(x)$ только 2π-периодична и интегрируема по любому конечному сегменту. Тогда для любого $0 < \delta < \pi$ функциональная последовательность*

$$\widehat{C}_n(x) = \frac{1}{\pi} \int\limits_{\delta \leqslant |t| \leqslant \pi} f(x+t)\frac{\sin(n+1/2)t}{2\sin\frac{t}{2}}\,dt \qquad (12)$$

сходится к нулю равномерно по x на всей прямой.

Для доказательства достаточно взять в следствии 2 в качестве $g(t)$ функцию

$$g(t) = \begin{cases} \frac{1}{2\sin\frac{t}{2}}, & \delta \leqslant |t| \leqslant \pi \\ 0, & |t| < \delta \end{cases}$$

и заметить, что она интегрируема.

2° Принцип локализации Римана.

Теорема 16 (Риман). *Если $f(t)$ только 2π-периодична и интегрируема по сегменту $[-\pi,\pi]$, то решение вопроса о сходимости ТРФ этой функции в фиксированной точке $x \in [-\pi,\pi]$ зависит только от поведения функции в как угодно малой δ-окрестности точки x.*

Доказательство. Вспомним, что

$$S_n(x,f) = \frac{1}{\pi}\int\limits_{-\pi}^{\pi} f(x+t)\frac{\sin(n+1/2)t}{2\sin\frac{t}{2}}\,dt.$$

Используя формулу (12), можно записать

$$S_n(x,f) = \frac{1}{\pi}\int\limits_{-\delta}^{\delta} f(x+t)\frac{\sin(n+1/2)t}{2\sin\frac{t}{2}}\,dt + \widehat{C}_n(x). \qquad (13)$$

В силу Леммы 4 последовательность $\widehat{C}_n(x) \to 0$ равномерно на $(-\infty, \infty)$ и тогда вопрос о сходимости ТРФ решается только с помощью первого слагаемого. Так как $t \in [-\delta; \delta]$, то аргумент функции f принимает значения из интервала $[x-\delta; x+\delta]$. Тем самым теорема доказана.

Теорема 17 (Уточненная теорема Римана). *Если функция $f(x)$ 2π-периодична и интегрируема на каждом конечном сегменте и обращается в 0 на некотором отрезке $[a, b] \subseteq [-\pi, \pi]$, то при любом достаточно малом $\delta > 0$ ТРФ этой функции сходится равномерно на $[a+\delta, b-\delta]$.*

Доказательство. Для любого $x \in [a+\delta, b-\delta]$ все значения в интеграле (13) не выходят за пределы значений функции на сегменте $[a, b]$, т.е. равны нулю, а $\widehat{C}_n(x) \to 0$ равномерно.

Следствие. *Для того, чтобы для некоторого сегмента $[a, b] \subseteq [-\pi, \pi]$ и для любого $\delta > 0$ ТРФ 2π-периодической и интегрируемой по любому конечному сегменту функции $f(t)$ сходился равномерно на сегменте $[a+\delta, b-\delta]$, достаточно, чтобы существовала 2π-периодическая и интегрируемая по любому конечному сегменту функция $g(t)$, совпадающая с $f(t)$ на $[a, b]$ и такая, что ее ТРФ сходится равномерно на $[a+\delta, b-\delta]$.*

Для доказательства достаточно взять в Теореме 17 вместо $f(x)$ функцию $f(x) - g(x)$ и учесть, что $f(x) = [f(x) - g(x)] + g(x)$.

3° Условия сходимости ТРФ в точке.

Определение 1. Будем говорить, что $f(x)$ удовлетворяет условию Гельдера порядка α (где $0 < \alpha \leqslant 1$) в данной точке x_0 справа , если

(1) $f(x)$ имеет в точке x_0 правый предел,

(2) если существуют такие постоянные $M > 0$, $\delta > 0$, что

$$|f(x_0+t) - f(x_0+0)| \leqslant Mt^{\alpha} \tag{1}$$

при всех $0 < t < \delta$.

Определение 2. Будем говорить, что $f(x)$ удовлетворяет условию Гельдера порядка α (где $0 < \alpha \leqslant 1$) в данной точке x_0 слева, если

(1) $f(x)$ имеет в точке x_0 левый предел,

(2) если существуют такие постоянные $M > 0$, $\delta > 0$, что

$$|f(x_0 + t) - f(x_0 - 0)| \leqslant M|t|^{\alpha} \tag{2}$$

при всех $-\delta < t < 0$.

Теорема 18. *Если $f(x)$ 2π-периодична и интегрируема по каждому конечному сегменту и в данной точке удовлетворяет условию Гельдера порядка α_1 $(0 < \alpha_1 \leqslant 1)$ справа, а слева — порядка α_2 $(0 < \alpha_2 \leqslant 1)$, то ТРФ этой функции сходится в точке x_0 к значению $\frac{1}{2}[f(x_0 + 0) + f(x_0 - 0)]$.*

Доказательству этой теоремы предпошлем Лемму 5.

Лемма 5. *Если $f(x)$ 2π-периодична и интегрируема по каждому конечному сегменту и имеет в данной точке x_0 правый и левый пределы, то для любого $0 < \delta < \pi$ каждая из двух последовательностей*

$$d_n^+(x_0) = \frac{1}{\pi}\int\limits_{\delta}^{\pi}[f(x_0 + t) - f(x_0 + 0)]\frac{\sin(n + 1/2)t}{2\sin\frac{t}{2}}\,dt \tag{3}$$

$$d_n^-(x_0) = \frac{1}{\pi}\int\limits_{-\pi}^{-\delta}[f(x_0 + t) - f(x_0 - 0)]\frac{\sin(n + 1/2)t}{2\sin\frac{t}{2}}\,dt \tag{4}$$

является бесконечно малой числовой последовательностью.

Доказательство. Каждая из последовательностей

$$c_n^+(x) = \frac{1}{\pi}\int\limits_{\delta}^{\pi} f(x_0 + t)\frac{\sin(n + 1/2)t}{2\sin\frac{t}{2}}\,dt$$

$$c_n^-(x) = \frac{1}{\pi}\int\limits_{-\pi}^{-\delta} f(x_0 + t)\frac{\sin(n + 1/2)t}{2\sin\frac{t}{2}}\,dt$$

равномерно стремится к нулю согласно следствию 2 из лемм 2 и 3, примененному к соответственно к функциям

$$g(t)=\begin{cases} \frac{1}{2\sin\frac{t}{2}}, & \delta\leqslant t\leqslant\pi \\ 0, & \text{для остальных точек сегмента } [-\pi,\pi] \end{cases}$$

в случае $c_n^+(x)$ и

$$g(t)=\begin{cases} \frac{1}{2\sin\frac{t}{2}}, & -\pi\leqslant t\leqslant-\delta \\ 0, & \text{для остальных точек сегмента } [-\pi,\pi], \end{cases}$$

в случае $c_n^-(x)$. Тогда отсюда будет вытекать, что если в $c_n^+(x)$ и $c_n^-(x)$ взять $f(x)\equiv 1$, то каждая из последовательностей

$$b_n^+=\frac{f(x_0+0)}{\pi}\int\limits_{\delta}^{\pi}\frac{\sin(n+1/2)t}{2\sin\frac{t}{2}}\,dt$$

$$b_n^-=\frac{f(x_0-0)}{\pi}\int\limits_{-\pi}^{-\delta}\frac{\sin(n+1/2)t}{2\sin\frac{t}{2}}\,dt$$

является бесконечно малой числовой последовательностью.

Остается заметить, что $d_n^+(x)=c_n^+(x)-b_n^+(x)$ и $d_n^-(x)=c_n^-(x)-b_n^-(x)$.

Переходим к доказательству теоремы. В силу условия существуют постоянные $M_1>0$, $M_2>0$, $\delta_1>0$, $\delta_2>0$ такие, что

$$|f(x_0+t)-f(x_0+0)|\leqslant M_1t^{\alpha_1}\quad\text{при } 0<t_1<\delta_1 \tag{5}$$

и

$$|f(x_0+t)-f(x_0-0)|\leqslant M_2|t|^{\alpha_2}\quad\text{при } -\delta_2<t_2<0. \tag{6}$$

Положим $M=\max\{M_1,M_2\}$, $\delta_0=\min\{\delta_1,\delta_2\}$, $\alpha=\min\{\alpha_1,\alpha_2\}$, тогда можно записать

$$|f(x_0+t)-f(x_0\pm 0)|\leqslant M|t|^{\alpha}\ \text{при } 0<|t|<\delta_0, \tag{7}$$

причем знак "+" выбирается при $t > 0$, знак "−" — при $t < 0$.

Фиксируем произвольно $\varepsilon > 0$ и по нему $\delta > 0$ такое, что

$$1)\delta < \delta_0; \qquad 2)M\frac{\delta^\alpha}{\alpha} < \frac{\varepsilon}{2}. \tag{8}$$

В силу четности ядра Дирихле имеем

$$\frac{1}{\pi}\int_0^\pi D_n(t)\,dt = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^0 D_n(t)\,dt = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^\pi D_n(t)\,dt = \frac{1}{2}.$$

Из выражения для частичной суммы ряда Фурье получаем

$$S_n(x_0,f) - \frac{1}{2}[f(x_0+0) - f(x_0-0)] =$$
$$\frac{1}{\pi}\int_0^\pi [f(x_0+t) - f(x_0+0)]D_n(t)\,dt +$$
$$\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^0 [f(x_0+t) - f(x_0-0)]D_n(t)\,dt.$$

Покажем, что эта последовательность является бесконечно малой числовой последовательностью.

Далее представим $S_n(x_0,f) - \frac{1}{2}[f(x_0+0) - f(x_0-0)]$ в виде суммы $I_1 + I_2 + I_3 + I_4 + I_5 + I_6$ шести интегралов, где

$$I_1 = \frac{1}{\pi} \int\limits_0^{\delta} [f(x_0+t) - f(x_0+0)] D_n(t)\,dt$$

$$I_2 = \frac{1}{\pi} \int\limits_{-\delta}^{0} [f(x_0+t) - f(x_0-0)] D_n(t)\,dt$$

$$I_3 = \frac{1}{\pi} \int\limits_{\delta}^{\pi} f(x_0+t) D_n(t)\,dt$$

$$I_4 = \frac{1}{\pi} \int\limits_{-\pi}^{-\delta} f(x_0+t) D_n(t)\,dt$$

$$I_5 = -\frac{f(x_0+0)}{\pi} \int\limits_{\delta}^{\pi} D_n(t)\,dt$$

$$I_6 = -\frac{f(x_0-0)}{\pi} \int\limits_{-\pi}^{-\delta} D_n(t)\,dt.$$

Нужно показать, что абсолютная величина каждого из этих интегралов стремится к нулю при $n \to \infty$.

Для последующих рассуждений нам понадобится неравенство

$$|D_n(t)| \leqslant \frac{1}{|2\sin\frac{t}{2}|} \leqslant \frac{\pi}{2|t|}, \tag{9}$$

докажем его. Для этого рассмотрим функцию $g(\tau) = \frac{\sin\tau}{\tau}$, $0 < \tau < \frac{\pi}{2}$.

Тогда $g'(\tau) = \frac{\tau\cos\tau - \sin\tau}{\tau^2} = \frac{\cos\tau(\tau - \operatorname{tg}\tau)}{\tau^2} \leqslant 0$ (так как всюду в I-ой четверти $\sin\tau \leqslant \tau \leqslant \operatorname{tg}\tau$), следовательно $g(\tau)$ является убывающей функцией. Поэтому $\frac{\sin\tau}{\tau} \geqslant \frac{\sin\frac{\pi}{2}}{\frac{\pi}{2}} = \frac{2}{\pi}$, $\frac{1}{\sin\tau} \leqslant \frac{\pi}{2\tau}$ и $\frac{1}{2\sin\frac{t}{2}} \leqslant \frac{\pi}{2t}$. Так как функции $\sin\tau$ и τ нечетные, то неравенство справедливо для всех $\tau > 0$ и $\tau < 0$, поэтому неравенство (9) справедливо при $-\pi < t < \pi$.

Ранее было доказано, что при выполненных условиях существует номер n_0 такой, что при всех $n > n_0$ выполняется $|I_3| < \frac{\varepsilon}{6}$, $|I_4| < \frac{\varepsilon}{6}$, $|I_5| < \frac{\varepsilon}{6}$, $|I_6| < \frac{\varepsilon}{6}$ (так как каждую из этих последовательностей можно представить в виде произведения бесконечно малой и ограниченной последовательностей).

Теперь с помощью (7), (8) и (9) докажем, что при всех n справедливо $|I_1| < \frac{\varepsilon}{6}$, $|I_2| < \frac{\varepsilon}{6}$. Имеем

$$|I_1| \leqslant \frac{M}{\pi} \int\limits_0^\delta t^\alpha \cdot \frac{\pi}{2t}\, dt = \frac{M}{2} \int\limits_0^\delta t^{\alpha-1}\, dt = \frac{Mt^\delta}{2\alpha} \leqslant \frac{\varepsilon}{6}.$$

Оценка I_2 проводится аналогично.

Теорема доказана.

4°. Равномерная сходимость ТРФ на $[-\pi, \pi]$. Сформулируем условия равномерной сходимости в терминах обычного модуля непрерывности.

Определение 1. Будем говорить, что непрерывная на сегменте $[-\pi, \pi]$ функция принадлежит классу Дини-Липшица, если $w(\delta, f) = o\left(\frac{1}{\ln \frac{1}{\delta}}\right)$ или (что то же самое)

$$\lim_{\delta \to 0+0} \left[w(\delta, f) \ln \frac{1}{\delta} \right] = 0. \qquad (1)$$

Определение 2. Будем говорить, что непрерывная на сегменте $[-\pi, \pi]$ функция принадлежит классу Гельдера порядка $0 < \alpha \leqslant 1$, если $w(\delta, f) = O(\delta^\alpha)$, т.е. существует такая постоянная $M > 0$, что

$$w(\delta, f) \leqslant M\delta^\alpha. \qquad (2)$$

Функция, принадлежащая классу Гельдера любого положительного порядка, тем более принадлежит классу Дини-Липшица, поэтому доказанная в классе Дини-Липшица теорема будет доказана и для класса Гельдера.

Теорема 19 (Дини-Липшиц). *Если непрерывная на сегменте $[-\pi, \pi]$ функция $f(x)$ принадлежит классу Дини-Липшица и удовлетворяет условию $f(-\pi) = f(\pi)$, то ТРФ этой функции сходится равномерно к ней на этом сегменте.*

Эта теорема в терминах модуля непрерывности окончательна, так как существует пример функции, обычный модуль непрерывности которой $w(\delta, f) = O(\ln\frac{1}{\delta})$, принимающая на концах сегмента $[-\pi;\pi]$ одинаковые значения, ТРФ которой расходится на множестве точек, всюду плотном на $[-\pi;\pi]$.

Доказательство теоремы 19. Используя формулу для частичной суммы $S_n(x, f)$ ТРФ функции f и формулу синуса суммы, получим

$$S_n(x, f) = \frac{1}{\pi}\int\limits_{-\pi}^{\pi} f(x+t)D_n(t)\,dt = S_n^*(x, f) + S_n^{**}(x, f), \qquad (3)$$

где

$$S_n^*(x, f) = \frac{1}{\pi}\int\limits_{-\pi}^{\pi} f(x+t)\frac{\sin nt}{2\operatorname{tg}\frac{t}{2}}\,dt, \qquad (4)$$

$$S_n^{**}(x, f) = \frac{1}{\pi}\int\limits_{-\pi}^{\pi} f(x+t)\frac{\cos nt}{2}\,dt. \qquad (5)$$

В силу следствия 1 из лемм 2 и 3 с $g(t) \equiv 1$ получим, что $S_n^{**}(x, f)$ стремится к нулю равномерно по x на отрезке $[-\pi, \pi]$. Поэтому для доказательства теоремы достаточно показать, что $S_n^*(x, f)$ стремится к нулю равномерно по x на этом же отрезке.

Кстати, $S_n^*(x, f)$ называют *модифицированной* частичной суммой ТРФ.

В (3), (4) и (5) возьмем $f(x) \equiv 1$, тогда $S_n^{**}(x, 1) = 0$. По формуле $(\tilde{*})$ имеем $S_n(x, 1) = 1$ и поэтому

$$S_n^*(x, 1) = \frac{1}{\pi}\int\limits_{-\pi}^{\pi} \frac{\sin nt}{2\operatorname{tg}\frac{t}{2}}\,dt = 1. \qquad (6)$$

На основании полученного имеем

$$S_n^*(x, f) - f(x) = \frac{1}{\pi}\int\limits_{-\pi}^{\pi} [f(x+t) - f(x)]\frac{\sin nt}{2\operatorname{tg}\frac{t}{2}}\,dt. \qquad (7)$$

Осталось доказать, что правая часть (7) равномерно стремится к нулю. Представим полученный интеграл в виде суммы:

$$\frac{1}{\pi}\int\limits_{-\pi}^{\pi}[f(x+t)-f(x)]\frac{\sin nt}{2\operatorname{tg}\frac{t}{2}}\,dt =$$

$$\frac{1}{\pi}\int\limits_{-\pi}^{0}[f(x+t)-f(x)]\frac{\sin nt}{2\operatorname{tg}\frac{t}{2}}\,dt + \frac{1}{\pi}\int\limits_{0}^{\pi}[f(x+t)-f(x)]\frac{\sin nt}{2\operatorname{tg}\frac{t}{2}}\,dt$$

и дальше в интеграле $\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{0}[f(x+t)-f(x)]\frac{\sin nt}{2\operatorname{tg}\frac{t}{2}}\,dt$ заменим t на $-t$. В силу нечетности функций $\sin t$ и $\operatorname{tg} t$ знаки не изменятся и

$$S_n^*(x,f)-f(x)=\frac{1}{\pi}\int\limits_{0}^{\pi}\Delta_x^2 f(t)\frac{\sin nt}{2\operatorname{tg}\frac{t}{2}}\,dt, \qquad (8)$$

где символ $\Delta_x^2 f(t)$ обозначает так называемую *вторую разность* $\Delta_x^2 f(t) = f(x+t)+f(x-t)-2f(x)$.

В (8) заменим t на $t+\frac{\pi}{n}$, при этом $\sin n(t+\frac{\pi}{n})$ перейдет в $-\sin nt$ и

$$S_n^*(x,f)-f(x)=-\frac{1}{\pi}\int\limits_{-\frac{\pi}{n}}^{\pi-\frac{\pi}{n}}\Delta_x^2 f(t+\frac{\pi}{n})\frac{\sin nt}{2\operatorname{tg}\frac{t+\frac{\pi}{n}}{2}}\,dt. \qquad (9)$$

Рассмотрим полусумму правых и левых частей (8) и (9):

$$S_n^*(x,f)-f(x)=\frac{1}{2\pi}\int\limits_{0}^{\pi}\Delta_x^2 f(t)\frac{\sin nt}{2\operatorname{tg}\frac{t}{2}}\,dt-$$

$$\frac{1}{2\pi}\int\limits_{-\frac{\pi}{n}}^{\frac{\pi}{n}}\Delta_x^2 f(t+\frac{\pi}{n})\frac{\sin nt}{2\operatorname{tg}\frac{t+\frac{\pi}{n}}{2}}\,dt = I_1+I_2+I_3+I_4, \qquad (10)$$

где

$$I_1 = \frac{1}{2\pi} \int\limits_{\frac{\pi}{n}}^{\pi-\frac{\pi}{n}} \Big[\frac{\Delta_x^2 f(t)}{2\operatorname{tg}\frac{t}{2}} - \frac{\Delta_x^2 f(t+\frac{\pi}{n})}{2\operatorname{tg}\frac{t+\frac{\pi}{n}}{2}}\Big] \sin nt\,dt,$$

$$I_2 = \frac{1}{2\pi} \int\limits_{\pi-\frac{\pi}{n}}^{\pi} \Delta_x^2 f(t) \frac{\sin nt}{2\operatorname{tg}\frac{t}{2}}\,dt, \qquad I_3 = \frac{1}{2\pi} \int\limits_0^{\frac{\pi}{n}} \Delta_x^2 f(t) \frac{\sin nt}{2\operatorname{tg}\frac{t}{2}}\,dt$$

$$I_4 = -\frac{1}{2\pi} \int\limits_{-\frac{\pi}{n}}^{\frac{\pi}{n}} \frac{\Delta_x^2 f(t+\frac{\pi}{n})}{2\operatorname{tg}\frac{t+\frac{\pi}{n}}{2}} \sin nt\,dt = \Big(\text{замена } t \to t + \frac{\pi}{n}\Big) =$$

$$\frac{1}{2\pi} \int\limits_0^{\frac{2\pi}{n}} \Delta_x^2 f(t) \frac{\sin nt}{2\operatorname{tg}\frac{t}{2}}\,dt.$$

Покажем, что для любой непрерывной функции интегралы I_1, I_2, I_3, I_4 при $n \to \infty$ стремятся к нулю равномерно по x. Сначала оценим сумму $|I_3| + |I_4|$, для этого воспользуемся неравенствами

(1) $|\sin nt| \leqslant nt$ для всех $t > 0$ и для всех номеров n;
(2) $\frac{1}{2\operatorname{tg}\frac{t}{2}} \leqslant \frac{1}{t}$ для всех $0 < t < \pi$
(3) $|\Delta_x^2 f(t)| \leqslant |f(x+t) - f(x)| + |f(x-t) - f(x)| \leqslant 2w(\frac{2\pi}{n}, f)$.

Учтем также, что

$$|\Delta_x^2 f(t) - \Delta_x^2 f(t+\pi/n)| \leqslant |f(x+t) - f(x+t+\pi/n)| + \\ |f(x-t) - f(x-t-\pi/n)| \leqslant 2w(\pi/n, f)$$

и

$$|\Delta_x^2 f(t)| \leqslant 2w(t, f).$$

Тогда имеем

$$|I_3| + |I_4| \leqslant \frac{2}{\pi} n w\Big(\frac{2\pi}{n}, f\Big) \int\limits_0^{\frac{2\pi}{n}} dt \leqslant 4w\Big(\frac{2\pi}{n}, f\Big),$$

а $w\Big(\frac{2\pi}{n}, f\Big)$ стремится к нулю при $n \to \infty$ равномерно по x.

Для оценки $|I_2|$ заметим, что при $\pi - \frac{\pi}{n} \leqslant t \leqslant \pi$ и при $n \geqslant 2$ справедливо неравенство

$$\left|\frac{\sin nt}{2\operatorname{tg}\frac{t}{2}}\right| = \frac{\operatorname{ctg}\frac{t}{2}}{2} \leqslant C_1 = const. \tag{11}$$

Кроме того, непрерывная функция $f(t)$, а потому и вторая разность $\Delta_x^2 f(t)$ ограничена для всех $x \in [-\pi; \pi]$, т.е. существует $C_2 > 0$ такое, что

$$|\Delta_x^2 f(t)| \leqslant C_2. \tag{12}$$

Из (11) и (12) для всех $x \in [-\pi; \pi]$ получим

$$|I_2| \leqslant C_1 \cdot C_2 \int\limits_{\pi-\frac{\pi}{n}}^{\pi} dt = \frac{C_1 C_2 \pi}{n} \to 0$$

равномерно по x при $n \to \infty$.

Осталось оценить $I_1 = I_1' + I_1''$, где

$$I_1' = \frac{1}{2\pi} \int\limits_{\frac{\pi}{n}}^{\pi-\frac{\pi}{n}} \Big[\frac{\Delta_x^2 f(t) - \Delta_x^2 f(t+\frac{\pi}{n})}{2\operatorname{tg}\frac{t+\frac{\pi}{n}}{2}}\Big] \sin nt\, dt,$$

$$I_1'' = \frac{1}{2\pi} \int\limits_{\frac{\pi}{n}}^{\pi-\frac{\pi}{n}} \Delta_x^2 f(t) \Big[\frac{1}{2\operatorname{tg}\frac{t}{2}} - \frac{1}{2\operatorname{tg}\frac{t+\frac{\pi}{n}}{2}}\Big] \sin nt\, dt.$$

Сначала оценим $|I_1'|$:

$$\left|\frac{\Delta_x^2 f(t) - \Delta_x^2 f(t+\frac{\pi}{n})}{2\operatorname{tg}\frac{t+\frac{\pi}{n}}{2}}\right| =$$

$$\Big|f(x+t) + f(x-t) - 2f(x) - f(x+t+\frac{\pi}{n}) - f(x-t-\frac{\pi}{n}) + 2f(x)\Big| \leqslant$$

$$\Big|f(x+t) - f(x+t+\frac{\pi}{n})\Big| + \Big|f(x-t) - f(x-t-\frac{\pi}{n})\Big| \leqslant 2w\Big(\frac{\pi}{n}, f\Big).$$

Используя неравенства $|\sin nt| \leqslant 1$ и $\frac{1}{2\operatorname{tg}\frac{t}{2}} \leqslant \frac{1}{t}$ (справедливое при $t \in [\pi/n; \pi - \pi/n]$), получим

$$|I_1'| \leqslant \frac{1}{\pi} w\Big(\frac{\pi}{n}, f\Big) \int\limits_{\frac{\pi}{n}}^{\pi} \frac{dt}{t} \leqslant \frac{1}{\pi} w\Big(\frac{\pi}{n}, f\Big)\Big[\ln\pi + \ln\frac{n}{\pi}\Big] \leqslant \frac{2}{\pi} w\Big(\frac{\pi}{n}, f\Big) \ln\frac{n}{\pi}.$$

Правая часть данного неравенства стремится к нулю по условию Дини-Липшица.

Оценим абсолютную величину интеграла I_1'':

$$\frac{1}{2\operatorname{tg}\frac{t}{2}}-\frac{1}{2\operatorname{tg}\frac{t+\frac{\pi}{n}}{2}}=\frac{1}{2}\left[\frac{\cos\frac{t}{2}}{\sin\frac{t}{2}}-\frac{\cos\frac{t+\frac{\pi}{n}}{2}}{2\sin\frac{t+\frac{\pi}{n}}{2}}\right]=\frac{1}{2}\frac{\sin\frac{\pi}{2n}}{\sin\frac{t}{2}\sin\frac{t+\frac{\pi}{n}}{2}}.$$

Неравенства $\frac{1}{\sin\frac{t}{2}}\leqslant\frac{\pi}{t}$, $\frac{1}{\sin\frac{t+\frac{\pi}{n}}{2}}\leqslant\frac{1}{\sin\frac{t}{2}}\leqslant\frac{\pi}{t}$ справедливы для всех $t\in[\pi/n;\pi-\pi/n]$, поэтому получаем

$$\left|\frac{1}{2\operatorname{tg}\frac{t}{2}}-\frac{1}{2\operatorname{tg}\frac{t+\frac{\pi}{n}}{2}}\right|\leqslant A\cdot\frac{1}{nt^2}.$$

Так как $|\Delta_x^2 f(t)|\leqslant 2w(t,f)$ и $|\sin nt|\leqslant 1$, то

$$|I_1''|\leqslant\frac{A}{\pi n}\int\limits_{\frac{\pi}{n}}^{\pi}\frac{w(t,f)}{t^2}\,dt=\frac{A}{\pi n}\int\limits_{\frac{\pi}{n}}^{\frac{\pi}{\sqrt{n}}}\frac{w(t,f)}{t^2}\,dt+\frac{A}{\pi n}\int\limits_{\frac{\pi}{\sqrt{n}}}^{\pi}\frac{w(t,f)}{t^2}\,dt\leqslant$$

$$\frac{A}{\pi n}w\Big(\frac{\pi}{\sqrt{n}},f\Big)\int\limits_{\frac{\pi}{n}}^{\frac{\pi}{\sqrt{n}}}\frac{dt}{t^2}+\frac{A}{\pi n}w(\pi,f)\int\limits_{\frac{\pi}{\sqrt{n}}}^{\frac{\pi}{n}}\frac{dt}{t^2}\leqslant\frac{A}{\pi}w(\frac{\pi}{\sqrt{n}},f)\Big[\frac{n-\sqrt{n}}{\pi n}\Big]+$$

$$\frac{A}{\pi}w(\pi,f)\Big[\frac{\sqrt{n}-1}{\pi n}\Big]\leqslant\frac{A}{\pi^2}w(\frac{\pi}{\sqrt{n}},f)+\frac{A}{\pi^2\sqrt{n}}w(\pi,f).$$

Первое слагаемое в последнем неравенстве равномерно по x стремится к нулю при $n\to\infty$, а второе при $n\to\infty$ как угодно мало.

Теорема доказана.

Замечание 1. Если функция $f(x)$ принадлежит на сегменте $[-\pi,\pi]$ классу Гельдера порядка α, $0<\alpha\leqslant 1$, и удовлетворяет условию $f(-\pi)=f(\pi)$, то ТРФ этой функции сходится равномерно на этом сегменте. Если же функцию продолжить периодически на всю прямую, то равномерная сходимость будет на всей прямой.

Замечание 2. Класс Дини-Липшица является окончательным в терминах модуля непрерывности классом, в котором есть равномерная сходимость ТРФ.

Пример Зигмунда. Существует функция $f(x)$, для которой $w(\delta, f) = o(\frac{1}{\ln\frac{1}{\delta}})$ и ТРФ которой расходится на множестве точек, всюду плотном на $[-\pi, \pi]$.

5°. Равномерная сходимость ТРФ функций, принадлежащих классу Гёльдера (или классу Дини-Липшица) только локально.

Теорема 20. *Если функция $f(x)$ 2π-периодична и интегрируема по любому конечному сегменту и принадлежит классу Гельдера или классу Дини-Липшица только на $[a, b] \subset [-\pi, \pi]$, то для любого как угодно малого $\delta > 0$ ТРФ этой функции сходится к ней равномерно на сегменте $[a + \delta, b - \delta]$.*

Доказательство. Фиксируем произвольное достаточно малое $\delta > 0$ и по данной функции $f(x)$ построим $g(x)$, совпадающую с $f(x)$ на $[a + \delta/2, b - \delta/2]$, а на сегменте $[b - \delta/2, a + \delta/2 + 2\pi]$ пусть $g(x) = Ax + B$ с постоянными A и B, определяемыми соотношениями $g(b - \delta/2) = f(b - \delta/2)$, $g(a + \delta/2 + 2\pi) = f(a + \delta/2 + 2\pi)$. Такую функцию g продолжаем периодически с периодом 2π на всю прямую. Полученная функция $g(x)$ удовлетворяет всем условиям теоремы Дини-Липшица, поэтому ТРФ этой функции сходится к ней равномерно на всей прямой. По следствию из второй теоремы Римана (Теорема 17) получаем равномерную сходимость ТРФ функции $f(x)$ на сегменте $[a + \delta, b - \delta]$.

6°. Сходимость ТРФ к кусочно-гельдеровой функции.

Пусть $[-\pi, \pi]$ разбит на конечное число сегментов, не имеющих общих внутренних точек и на каждом таком сегменте функция $f(x)$ принадлежит классу Гельдера некоторого порядка. Эти сегменты назовем *участками гельдеровости*, а функцию $f(x)$ *кусочно-гёльдеровой*. ТРФ такой функции будет сходиться в каждой точке прямой, причем на каждом сегменте, лежащем строго внутри интервала гельдеровости, сходимость будет равномерной, а в точках стыка участков гельдеровости в силу Теоремы 18 ТРФ будет сходиться к полусумме правых и левых значений.

7°. ТРФ функции $f(x)$ на произвольном сегменте $[-l;l]$.

Вся теория переносится на случай функции f, рассматриваемой не на сегменте $[-\pi,\pi]$, а на сегменте $[-l,l]$ $(l>0)$. В этом случае ряд

$$\frac{a_0}{2}+\sum_{k=1}^{\infty}(a_k\cos kx+b_k\sin kx)$$

имеет вид

$$\frac{a_0}{2}+\sum_{k=1}^{\infty}(a_k\cos\frac{\pi}{l}kx+b_k\sin\frac{\pi}{l}kx),$$

где коэффициенты Фурье определяются по формулам

$$a_0=\frac{1}{2l}\int_{-l}^{l}f(y)\,dy,$$

$$a_k=\frac{1}{l}\int_{-l}^{l}f(y)\cos\frac{\pi}{l}ky\,dy,\quad b_k=\frac{1}{l}\int_{-l}^{l}f(y)\sin\frac{\pi}{l}ky\,dy.$$